

Capítulo 8

ANÁLISIS Y COMPENSACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

 <https://doi.org/10.25100/peu.1416.cap8>

Objetivos y resultados de aprendizaje

Objetivo general

Explicar las técnicas de respuesta frecuencial y su aplicación para el análisis y diseño de compensadores en SAC.

Objetivos específicos

- Detallar la técnica de respuesta en frecuencia para obtener los gráficos de Bode y Nyquist.
- Mostrar las características de respuesta de frecuencia.
- Mostrar la técnica de construcción de los diagramas de Bode.
- Mostrar la técnica de construcción de los gráficos polares.
- Mostrar los criterios de análisis de estabilidad de Bode y de Nyquist.
- Mostrar el análisis de desempeño a partir de los círculos M y la carta de Nichols.
- Mostrar el procedimiento de ajuste de los compensadores, adicionando polos y ceros a los gráficos de frecuencia.

Resultados de aprendizaje

Al finalizar, el estudiante:

- Emplea el barrido de frecuencia para extraer la curva de respuesta en frecuencia de un sistema dinámico.
- Obtiene el modelo matemático del sistema a partir de la respuesta en frecuencia para analizar y diseñar SAC en el dominio de frecuencia compleja.
- Utiliza la técnica de respuesta en frecuencia para el análisis de sistemas de control.
- Ajusta compensadores dinámicos usando el método de respuesta de frecuencia para el control estático y dinámico de SAC.

Marco teórico

Por respuesta en frecuencia (RF) se entiende la respuesta en estado de régimen permanente de un sistema ante una entrada sinusoidal. La respuesta de frecuencia de un sistema se puede representar gráficamente de diversas formas; tiene una estrecha relación con la función de transferencia del sistema, lo que hace de esta herramienta un método muy poderoso para analizar y diseñar sistemas de control. Este método es especialmente útil para controlar el ancho de banda del sistema y

evitar amplificar ruido en el lazo, también lo es para evaluar la estabilidad, incluyendo variaciones de la función de transferencia que se desea controlar (estabilidad robusta) y para sistemas con tiempos muertos.

Es el método más usado para medir, caracterizar y diseñar sistemas dinámicos. Es más informativo que las técnicas por lugar geométrico de las raíces; permite extraer información sobre la sensibilidad del sistema y es muy útil para diseñar sistemas bajo el paradigma de la robustez.

Para extraer información en el dominio de la frecuencia se reconocen los gráficos de Bode y los gráficos polares. Como herramientas útiles para el análisis de la estabilidad relativa están los márgenes de fase y de magnitud, y los diagramas de Nyquist. Y para realizar la respuesta de frecuencia en red cerrada se tiene la herramienta conocida como los "círculos M". A continuación se revisarán estas técnicas.

Funciones y gráficos de respuesta de frecuencia

Los sistemas dinámicos de control se representan como un bloque donde aparece la función de transferencia, las entradas y salidas al sistema, como se muestra en la Figura 8.1.

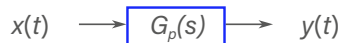


Figura 8.1: Bloque respuesta de frecuencia.

con:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \sin(\omega t) \\ y(t) &= Y \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (8.1)$$

La solución $y(t)$ contiene términos debidos a la entrada (señal forzante) y a las condiciones iniciales del proceso $G(s)$ (respuesta libre). La respuesta se calcula a partir de la expansión en fracciones parciales de la señal $y(s) = x(s)G_p(s)$; los términos asociados a los residuos y sus respectivas raíces dan la solución forzada.

Los gráficos de respuesta en frecuencia son gráficos de respuesta permanente obtenidos para frecuencias de la señal, idealmente desde cero hasta infinito. Por lo tanto, el cálculo de la respuesta permanente sinusoidal, usando la transformada inversa de Laplace es

$$y(t) = \int^{-1} \left[\frac{XwG_p(s)}{s^2 + w^2} \right] = \int^{-1} \left[\frac{K_1}{s + jw} + \frac{K_2}{s - jw} \right] \quad (8.2)$$

los primeros términos se calculan como

$$\begin{aligned} K_1 &= \left. \frac{XwG_p(s)}{s - jw} \right|_{s=-jw} \\ &= \frac{XG_p(-jw)}{-2j} \\ K_2 &= K_1 \frac{XG_p(jw)}{2j} \end{aligned}$$

y la respuesta forzada es

$$y_{ss}(t) = \frac{X[-G_p(-jw)e^{-j\omega t} + G_p(jw)e^{j\omega t}]}{2j} \quad (8.3)$$

Considerando que la dinámica de la planta es una variable compleja de la forma

$$G_p(w) = U(w) + jV(w) = M(w)e^{j\phi(w)}$$

con

$$M(w) = |G_p(jw)| = \sqrt{U^2(w) + V^2(w)}$$

y

$$\phi(w) = \tan^{-1} \frac{V(w)}{U(w)}$$

o

$$\begin{aligned} G_p(-jw) &= M(w)e^{-j\phi(w)} \\ G_p(jw) &= M(w)e^{j\phi(w)} \end{aligned}$$

Remplazando lo anterior en 8.3, se obtiene

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= \frac{XM(w)[e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}]}{2j} \\ y_{ss}(t) &= XM(w) \sin[\omega t + \phi(w)] \end{aligned} \quad (8.4)$$

Se observa que la salida es como la entrada, una señal seno con amplitud

$$\frac{Y}{X} = \frac{XM(w)}{X} = M(w)$$

y la salida aparece $\phi(\omega t)$ grados desplazados en la fase (desfasada).

Para el análisis en frecuencia, teniendo en cuenta que el operador de Laplace es $s = \sigma + jw$ en $G(s)$, se considera solo el término imaginario, o lo que es lo mismo, el término real es cero ($\sigma = 0$).

La respuesta de frecuencia se obtiene al inyectar señales al sistema (ver Figura 8.1) desde cero hasta infinito para el caso ideal. Los comportamientos del sistema en respuesta de frecuencia, se pueden representar de manera gráfica mediante:

1. Diagramas de Bode.
2. Gráfica polar.
3. Diagrama de Black.

A continuación se presenta cada uno de ellos.

Diagramas de Bode

Son dos gráficos, magnitud (en decibelios) y fase (en grados o en radianes) versus la frecuencia,

$$\begin{aligned} 20 \log |G_p(j\omega)| \text{ vs. } \log \omega \\ \phi(\omega) \text{ vs. } \log \omega \end{aligned}$$

Al hacer que el eje de frecuencias se represente en escala logarítmica lineal ($\log \omega$) se logran intervalos grandes de frecuencia.

La magnitud en decibelios permite buena precisión para valores grandes y pequeños de $|G_p(j\omega)|$. Los trazos de la magnitud tienden a líneas rectas; el gráfico de Bode facilita la adición de polos o ceros y los aportes de cada uno de ellos se introduce a las curvas sumando las gráficas de cada término. Todo ello simplifica el cálculo y la descripción gráfica de la respuesta de frecuencia. La fase se da en una escala lineal en grados o radianes.

El eje de frecuencias usualmente se da en décadas, donde una década corresponde a un intervalo de frecuencias dentro del cual la frecuencia final es 10 veces la inicial. Una limitación de esta gráfica es el análisis de estabilidad, el cual no se puede realizar para $G_p(s)$ con polos inestables.

Gráfica polar

Representa la gráfica de la parte real (U) versus la imaginaria (V) de $G_p(j\omega)$; también se le llama "plano de $G(j\omega)$ " o diagrama de Nyquist. Requiere de cálculos manuales tediosos y no indica el efecto de los polos o ceros individuales, por lo que debe trazarse usando un computador.

Esta gráfica permite evaluar la estabilidad con el criterio de Nyquist al igual que medidas de desempeño robusto.

Diagrama de Black

Es una variación de los trazos de Nyquist usando la información de Bode en un solo plano; en este diagrama

se representa en un solo gráfico la magnitud en decibelios contra la fase ($|G(j\omega)|_{db}$ vs. $\phi(\omega)$) en función de la frecuencia (ω). Como se expresó, presenta información equivalente a la del diagrama de Bode; al ser usada junto con la carta de Nichols da información de respuesta de frecuencia en red cerrada, como se verá más adelante.

Después de estudiar las características de respuesta de frecuencia, la correlación tiempo-frecuencia y las especificaciones de funcionamiento, se estudia la construcción de cada uno de ellos y su uso en control de sistemas dinámicos.

Características de respuesta de frecuencia

Son valores que permiten analizar el funcionamiento del sistema; los más importantes son:

1. Máximo pico de resonancia y frecuencia de resonancia.
2. Bandas, frecuencias de corte y ancho de banda.
3. Rata de corte.
4. Margen de ganancia.
5. Margen de fase.
6. Margen de retardo.
7. Margen del módulo.

Máximo pico de resonancia y frecuencia de resonancia

El máximo pico de resonancia $M_{P\omega}$ es el valor máximo de la función de transferencia ($|G_p(j\omega)|$); la frecuencia de resonancia ω_R es la frecuencia a la cual ocurre el $M_{P\omega}$. El máximo pico de resonancia permite prever cuál será la máxima salida para el barrido de frecuencia; sistemas con $M_{P\omega}$ elevados se pueden destruir si se excitan con frecuencias cercanas a la de resonancia y es por ello que se considera como un indicio de la estabilidad relativa del sistema. Para sistemas de segundo orden:

$$M_{P\omega} = \frac{1}{2\rho\sqrt{1-\rho^2}}, \quad 0 \leq \rho \leq 0.707$$

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\rho^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 0.707$$

Si el sistema está en lazo cerrado, el máximo pico de resonancia se analiza de la función de transferencia $T(j\omega)$ tal que

$$M_{PT} = |T(j\omega)|_{\max} = T_{\max}$$

Bandas, frecuencias de corte y ancho de banda

Las bandas son los rangos de frecuencia en los que el sistema exhibe un comportamiento en particular, se reconocen:

- La **banda pasante**. En este rango de frecuencias las componentes pasan a través del sistema con aproximadamente la misma atenuación o amplificación.
- La **banda de parada o de rechazo**. Las componentes de frecuencia no pasan a la salida; esto es, $|G(j\omega)|$ en esta banda es mucho menor que $|G(j\omega)|$ en la banda pasante.
- La **banda de transición**. Es una banda intermedia entre la banda pasante y la banda de parada.
- La **frecuencia de corte w_c** . Es la frecuencia para la cual $20 \log |G(j\omega)|$ está 3db por debajo de:
 - su valor a frecuencia cero para respuestas de frecuencia pasa bajo o de rechazo de banda,
 - su valor a alta frecuencia, para respuestas de frecuencia pasa alto,
 - M_{Pw} en la banda pasante, para respuestas de frecuencia en la banda pasante (en el lenguaje técnico también se conoce como "pasa banda").
- El **ancho de banda, w_{ab}** mide la diferencia de frecuencias entre las que un sistema o un filtro permite el paso de señales (filtro pasa banda) o rechaza el paso de señales (filtro banda de rechazo o, en lenguaje técnico, filtro de muesca)

$$w_{ab} = w_{c1} - w_{c2}$$

donde $w_{c1} > w_{c2} \geq 0$, siendo w_{ci} las frecuencias de corte en cada lado de la banda pasante.

Para los filtros o sistemas con característica pasa bajo, $w_{c1} = 0$.

Los sistemas de segundo orden normalizados son filtros pasa bajo con $20 \log |G(0)| = 0$:

$$w_c = w_{ab} - w_n \sqrt{(1 - 2\rho^2) + \sqrt{4\rho^4 - 4\rho^2 + 2}}$$

siendo w_c un indicativo de velocidad de respuesta para los filtros "pasa bajo".

Para sistemas en red cerrada $T(j\omega)$ con comportamiento como filtro pasa bajo, la frecuencia de corte se denota como w_{Tb} .

Rata de corte

Es la pendiente de $20 \log |FdT|$ (FdT : función de transferencia) en cercanías de la frecuencia de cruce de ganancia cero.

En red abierta se analiza la rata de corte $\log |GH(jw_g)|$, si es mayor que -2 (-40db/dec) la fase es menor a -180° y el sistema es inestable.

En red cerrada se analiza la rata de corte de $\log |T(jw_{Tb})|$, y da una indicación de la capacidad del sistema para discriminar señal de ruido.

Margen de ganancia

Es el factor por el cual se puede aumentar la ganancia del sistema para que alcance el límite de estabilidad; se calcula en el punto donde la fase es 180° , a esa frecuencia se le conoce como frecuencia de fase crítica w_π . Matemáticamente, para un sistema con ecuación característica $1 + GH(j\omega) = 0$ o $GH(j\omega) = -1$, en w_π tiene una magnitud $|GH(jw_\pi)|$ y se le puede adicionar una ganancia k antes de que se vuelva inestable, tal que

$$k|GH(jw_\pi)| = 1$$

a esa ganancia se le conoce como margen de ganancia y se expresa como el recíproco de $|GH(j\omega)|$ en la frecuencia crítica

$$MG = \frac{1}{|GH(jw_\pi)|} = -20 \log |GH(jw_\pi)| [\text{db}]$$

para un sistema de segundo orden: $w_\pi \rightarrow \infty$, $MG \rightarrow \infty$

Margen de fase

Es la cantidad o ángulo que se debe girar el lugar de $GH(j\omega)$ alrededor del origen para que el punto de magnitud unitaria $|GH(jw_g)| = 1$ pase por $(-1, 0)$; donde w_g se denomina frecuencia de ganancia crítica. Se calcula como

$$M_\phi = 180^\circ + \angle GH(jw_g)$$

Para un sistema de segundo orden con $0 < \rho < 1$ el margen de fase es:

$$M_\phi = \tan^{-1} \frac{2\rho}{\sqrt{1 + 4\rho^4 - 2\rho^2}} \cong 100\rho$$

Nota 49. Los M_G y M_ϕ son medidas de estabilidad relativa.▲

Margen de retardo

Es también una medida de estabilidad relativa. Está asociado con los sistemas con retardos o tiempos muertos; en ellos la salida solo responde después de un tiempo dado, como se observa en la Figura 8.2.

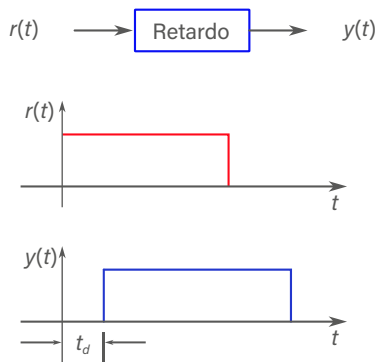


Figura 8.2: Representación del retardo.

Se representa con la función de transferencia:

$$G_R(j\omega) = e^{-T_d j\omega} = 1 - T_d \omega$$

a una frecuencia dada el retardo no cambia la magnitud, pero sí adiciona un retardo de fase $T_d \omega$.

Nota 50. Se puede, por tanto, convertir el margen de fase en un **margen de retardo**, entendido como el tiempo de retardo máximo que puedo adicionar a la dinámica de lazo abierto $GH(s)$ antes de que el sistema se haga inestable en red cerrada.▲

Como M_ϕ se calcula en la ω_g , entonces:

$$MR = \frac{M_\phi}{\omega_g}$$

Margen de módulo

Es una medida más global de la distancia entre el punto crítico $(-1, 0)$ en la gráfica polar y el lugar de $GH(j\omega)$; es el radio del círculo centrado en $(-1, 0)$, tangente a $GH(j\omega)$.

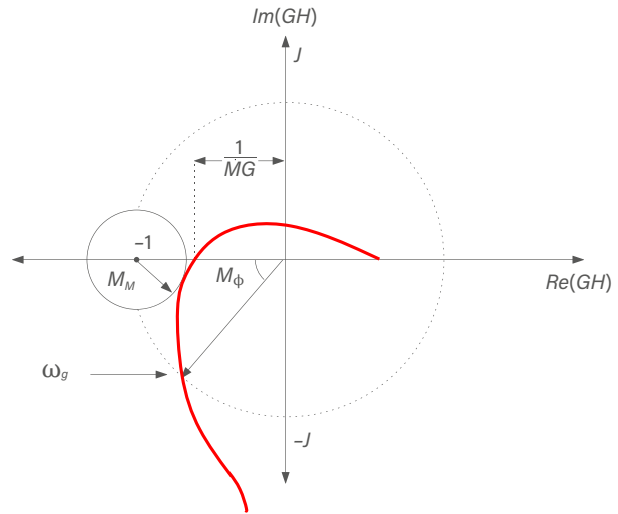


Figura 8.3: Trazo de Nyquist para ilustrar márgenes de módulo y de fase. Fuente: Ogata (1993).

Observe que el punto de tangencia M_M (ver Figura 8.3) corresponde a la mínima distancia para alcanzar el punto $(-1, 0)$,

$$M_M = |1 + GH(j\omega)|_{\min}$$

también recordando la función sensibilidad perturbación-salida dada por

$$S_{cd} = \frac{1}{1 + GH(j\omega)}$$

el margen de módulo se puede escribir como:

$$M_M = |1 + GH(j\omega)|_{\min} = \left| \frac{1}{S_{cd}} \right|_{\min} = \frac{1}{|S_{cd}|_{\max}}$$

Nota 51. Si se reduce el máximo de la función sensibilidad, el MM aumenta mejorando la estabilidad relativa.▲

Correlación tiempo-frecuencia

Una desventaja del método de análisis en respuesta de frecuencia es su relación indirecta con la respuesta transitoria del sistema; algunas de estas relaciones, a partir de las expresiones dadas para sistemas de segundo orden, son:

- M_ϕ solo es función de ρ ; se puede asociar el grado de amortiguamiento de la señal en el tiempo con el margen de fase.
- Los picos máximos de resonancia, así como los máximos picos de la función sensibilidad $S(j\omega)$ y

la función sensibilidad complementaria $T(jw)$ son inversas a la variación de ρ ; así, si ρ disminuye, el máximo pico de resonancia (M_{Pw}) aumenta.

- Valores muy pequeños de ρ llevan a valores muy elevados de sobrepaso.
- M_{Pw} da una idea del M_{PT} .
- w_g, w_{cr}, w_{Td} son inversamente proporcionales al tiempo de subida

$$t_R \cong \frac{3}{2\omega_g}$$

- Para ρ pequeños $w_R \cong w_d \cong w_N \cong w_g$
- A mayor ancho de banda de $T(jw)$ y $S(jw)$, mayor es la velocidad de respuesta y mayores componentes de ruido pueden pasar.
- Disminuir el ancho de banda contribuye a mejorar la robustez del sistema, ya que baja la posibilidad de ingreso de señales de ruido, pero disminuye la velocidad de respuesta (sistemas más lentos).

Cuando se tienen sistemas de orden superior al segundo orden, solo se pueden aplicar estas correlaciones si existe un par de polos complejos dominantes.

La respuesta permanente sí tiene una relación directa con la de frecuencia, puesto que el tipo de sistema determina la forma de la curva de $20 \log |GH(jw)|$ a baja frecuencia.

Para sistemas de tipo cero, la asíntota de baja frecuencia es una horizontal de altura $20 \log K_p$ ya que:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = \lim_{jw \rightarrow 0} GH(jw)$$

Para sistemas tipo uno:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s GH(s) = \lim_{jw \rightarrow 0} jw GH(jw)$$

Si solo se considera el polo en el origen,

$$GH(jw) = \frac{K_v}{jw}$$

a baja frecuencia; en $w = 1$ se tiene:

$$20 \log |GH(jw)|_{w=1} = 20 \log K_v$$

Luego la intersección de la asíntota de baja frecuencia o su prolongación con la recta $w = 1$ vale $20 \log K_v$.

De forma análoga, para sistemas tipo 2, la intersección de la asíntota de baja frecuencia con $w = 1$ vale $20 \log K_A$.

Calculadas las constantes de error, se puede conocer e_{ss} para cada entrada típica.

Especificaciones de funcionamiento

De la correlación tiempo-frecuencia y de la experiencia en diseño se tienen las siguientes especificaciones:

- $40^\circ \leq M_\phi \leq 70^\circ$
- $M_G \leq 6db$
- Ratas de corte de $20 \log |GH(jw)|$ y $20 \log |T(jw)|$ en cercanías de w_g y w_{cr} respectivamente, de $-20db/dec$.
- w_R, w_g, w_c tan grandes como sea posible sin afectar la estabilidad ni entrar en los rangos de frecuencia del ruido del sistema.
- Pendiente y altura de $20 \log |GH(jw)|$ a baja frecuencia que garantice el e_{ss} aceptable.
- El M_M impone límites mínimos de buen desempeño para el rechazo de perturbaciones; se especifica como valor apropiado: $M_M \geq 0.5(-6db)$, mínimo $0.4(-8db)$. Si se desea un error permanente nulo en estado estable ante un escalón de disturbio:

$$e_{ss} = S_{cd}(s=0) = 0 = \frac{1}{1 + GH(0)}$$

Para que se cumpla, se necesita que $GH(s)$ sea muy grande, esto es: $GH(0) \rightarrow \infty$ o lo que es lo mismo, $G(s)$ debe tener un integrador.

También es deseable que en ciertas bandas de frecuencia no se amplifique el efecto de la perturbación, por ello se impone una cota a $|S_{cd}(jw)|$; para esto se especifica:

$$M_M = \frac{1}{|S_{cd}|_{max}} \geq 0.5 \rightarrow |S_{cd}(jw)| \leq 2(6db), \forall w$$

Igualmente, se puede mostrar que M_M impone tolerancias en relación con alinealidades y elementos variantes con el tiempo del sistema.

Nota 52. Un $M_M > 0.5$ implica un $M_G \geq 2(6db)$ y un $M_\phi > 30^\circ$; en general, un buen M_M garantiza buenos M_G y M_ϕ ; buenos M_G o buenos M_ϕ no necesariamente garantizan un buen M_M .▲

Diagramas de Bode a partir de términos simples

Para el trazo de un diagrama de Bode conviene, primero, llevarlo a la forma de Bode:

$$GH(j\omega) = \frac{k_B \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{j\omega}{z_j}\right)}{(j\omega)^N \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{j\omega}{p_i}\right) \prod_{k=1}^q \left(1 + 2\rho_k \frac{j\omega}{\omega_k} - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right)} \quad (8.5)$$

Donde k_B es la constante de Bode.

- Magnitud [db]:

$$20 \log |GH(j\omega)| = 20 \log k_B + 20 \sum_{j=1}^m \log \left|1 + \frac{j\omega}{z_j}\right| - 20 \log |(j\omega)^N| - \dots$$

- Fase:

$$\phi(j\omega) = \sum_{j=1}^m \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{z_j}\right) - N(90^\circ) \dots$$

Los diagramas de magnitud y fase son la suma gráfica de cada factor individual; existen solo cuatro términos simples: ganancia constante, k_B ; polos o ceros

en el origen; polos o ceros en el eje real y polos o ceros conjugados complejos.

Ganancia constante

En la Figura 8.4 se muestra el aporte en la magnitud (arriba) y el aporte en la fase (abajo) de términos constantes en forma de rectas horizontales.

El aporte en la magnitud es de altura $20 \log k_B$ y el aporte en la fase es:

$$\phi(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ \rightarrow k_B > 0 \\ -180^\circ \rightarrow k_B < 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

Polos o ceros en el origen, $(j\omega T)^{\pm n} = 0$

En la Figura 8.5 se muestra el aporte en la magnitud (arriba) y en la fase (abajo) de polos y ceros en el origen.

Note que los ceros aportan rectas con pendiente positiva (+20, +40db/dec) y ángulo positivo (90°, 180°), mientras que los polos hacen lo mismo pero con signo contrario.

También se debe notar que todas las curvas cruzan en $\omega = 1 = 10^0$ por $20 \log(1) = 0\text{db}$ (Dorf, 1989).

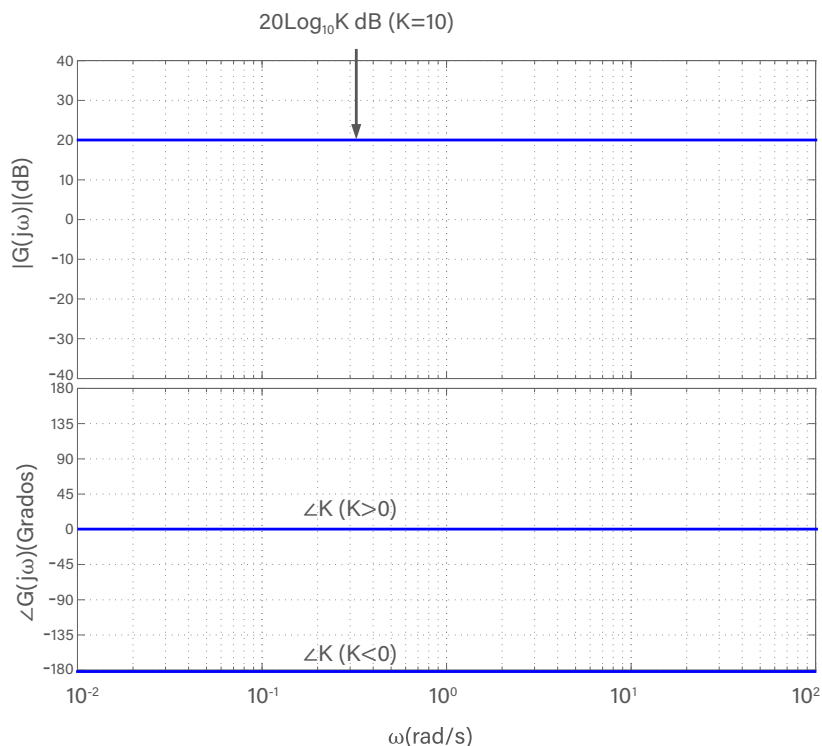


Figura 8.4: Aporte de término constante.

Polos o ceros en el eje real, $(1 + jwT)^{\pm 1}$

En la Figura 8.6 se muestra el aporte en la magnitud (arriba) y en la fase (abajo) de polos y ceros en el eje real.

Para un trazo aproximado se considera que los ceros (o polos) en el eje real aportan rectas cuyas asíntotas se cruzan en la frecuencia del cero $w = 1/w_z$ (o polo $w = 1/w_p$), tal que para frecuencias inferiores a la de la singularidad (polo o cero) se tiene una asíntota en $G = 0db$, y para frecuencias superiores a la de la singularidad aportan $+20db/dec$ cada cero y $-20db/dec$ cada polo.

Para la fase, tanto el cero como el polo en bajas frecuencias (por debajo de la singularidad), no aportan fase (0°); pero para frecuencias muy por encima de la singularidad aportan $\pm 90^\circ$ cada cero y cada polo, respectivamente.

Para trazar las asíntotas se consideran tres puntos: uno una década por debajo de la frecuencia de la singularidad, el otro en la frecuencia de la singularidad y el otro una década por encima de la singularidad.

Para el polo con singularidad en, por ejemplo, $1/\pi = w_p$, en una década por debajo ($0.1w_p$), se toma un punto en la fase 0° , en la frecuencia de la singularidad (en w_p) se traza otro punto en -45° y una década por encima ($10w_p$) se traza el otro punto en -90° , la unión de esas rectas se muestra en la figura en línea recta continua suave, mientras que los aportes del cero y del

polo se muestran en las líneas curvadas, el cero hacia arriba y el polo hacia abajo.

Para un mejor ajuste se toman las correcciones alrededor de las frecuencias de cruce de las asíntotas. Para mayor precisión, las herramientas de cómputo aportan detalles difíciles de lograr con los trazos manuales.

Polos o ceros complejos conjugados

El trazo de los diagramas de Bode para

$$G(jw) = [(1 + (2\rho/w_n)) jw + (jw/w_n)^2]^{-1}$$

se muestra en la Figura 8.7.

Sigue la misma filosofía que para el trazo de los polos o ceros en el eje real, pero sus aportes en amplitud y fase duplican al anterior. Se deben realizar ajustes a la gráfica de la magnitud en la esquina de cruce de asíntotas, considerando el factor de amortiguamiento, como se muestra en la Figura 8.7. También se realizan ajustes en la fase, como se muestra en la misma figura.

Ejemplo 1.

En los sistemas de generación de energía eléctrica que emplean máquinas generadoras síncronas, se requiere un sistema que excite la máquina.

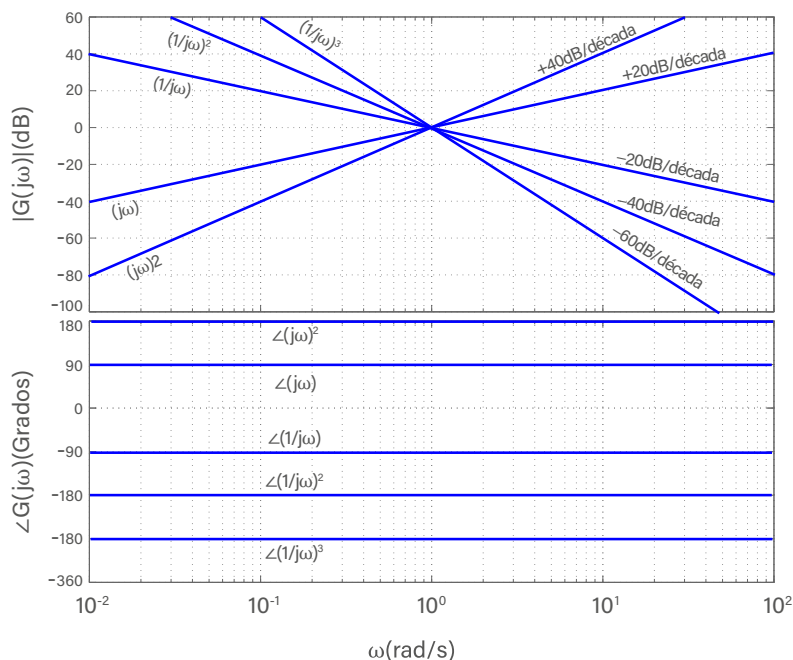


Figura 8.5: Aporte de polos y ceros en el origen.

- Analizar la estabilidad relativa del sistema de control de la excitación con excitatriz y acción integral (I) con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{k_I}{s(s+1)(0.2s+1)} \quad (8.7)$$

- Evaluar la constante de acción integral k_I para un $M_\phi = 60^\circ$; considere $\tau_G = 1$, $\tau_E = 0.2$.

Solución. Forma de Bode:

$$G(s) = \frac{\underbrace{1}_{K_I}}{\underbrace{s}_2 \underbrace{(s+1)}_3 \underbrace{\left(\frac{s}{5}+1\right)}_4}$$

- Con $k_I = 1$, $Mdb = 20 \log 1 = 0$.
- Mdb con pendiente -20 db/dec en $w = 1 \text{ rad/s}$
 $\rightarrow Mdb = 0$, $\phi_z = -90^\circ$.
- Mdb con pendiente -20 db/dec a partir de $w_c = 1$; fase con pendiente de $-45^\circ/\text{dec}$ para $w_c/10 \leq w \leq 10w_c$.
- Igual al término 3, con $w_c = 5 \text{ rad/s}$.

Los márgenes de ganancia y de fase se evalúan en el diagrama de Bode de $G(jw)$ de la Figura 8.8. De ahí que,

$$\begin{aligned} w_g &= 0.78 \text{ rad/s y } w_\pi = 2.24 \text{ rad/s.} \\ M_\phi &= 180^\circ - \phi(w_g) = 180^\circ - 136.8^\circ = 43.2^\circ \\ M_G &= -20 \log |G(w_\pi)| = 15.6 \text{ db} \end{aligned}$$

de la aproximación

$$\rho \cong 0.01M_\phi = 0.43$$

el sobrepaso estimado es de 0.22 %.

Para ajustar k_I de forma que se obtenga un $M_\phi = 60^\circ$, se observa que

$$\phi(w = 0.42) = -120^\circ \text{ y } Mdb(w = 0.42) \cong 6 \text{ db.}$$

Cambiar k_I equivale a variar la constante de Bode, luego incrementos o decrementos en k_I suben o bajan la curva de magnitud; para bajar 6 db se necesita multiplicar la ganancia inicial por una constante de atenuación k_{AT} ; luego

$$\begin{aligned} 20 \log k_{AT} &= -6 \rightarrow k_{AT} = 0.5 \\ \rightarrow k_{I60^\circ} &= 0.5k_{I43.2^\circ} = 0.5 \end{aligned}$$

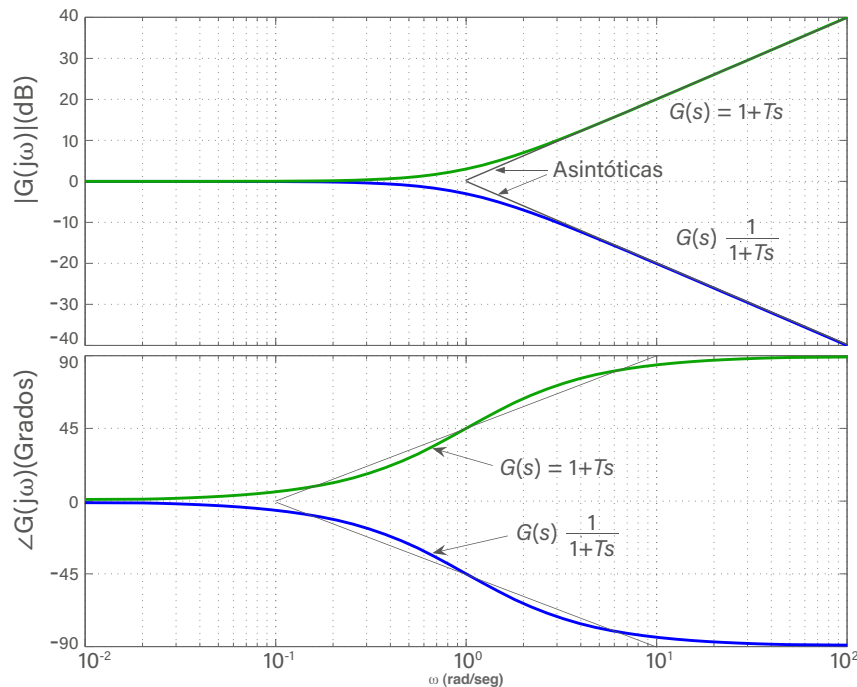


Figura 8.6: Aporte de polos y ceros en el eje real al gráfico de Bode.

Ejemplo 2.

Para trazar el diagrama de Bode del sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)}$$

se requiere llevarlo a la forma de Bode, por lo que es necesario cambiar la variable "s" a "jw" y posteriormente cambiar estas componentes dividiéndolas por las frecuencias en los polos o ceros respectivos. Por lo que la función se expresa ahora como:

$$\begin{aligned} G(jw) &= \frac{1080}{jw(jw+6)(jw+18)} \\ &= \frac{1080/(6 \cdot 18)}{jw(j\frac{w}{6}+1)(j\frac{w}{18}+1)} \\ &= \frac{10}{jw(j\frac{w}{6}+1)(j\frac{w}{18}+1)} \end{aligned}$$

A partir de ahí se pueden trazar las componentes asíntóticas con los aportes de la ganancia, los ceros y los polos, así:

- **Ganancia:**
Magnitud $20 \log(10) = 1 \text{ dB}$.
Fase 0° .
- **Polo en el origen:**
Magnitud -20 dB/dec (cruce en $w = 1 \text{ rad/seg}$).
Fase -90° .
- **Polo en 6 rad/seg :**
Magnitud 0 dB para $w \leq 6 \text{ rad/seg}$
y -20 dB/dec para $w > 6 \text{ rad/seg}$.
Fase de -45° en $w = 6 \text{ rad/seg}$, 0° para $w \leq 6/10 \text{ rad/seg}$,
 -90° para $w \geq 10 \cdot 6 \text{ rad/seg}$, y una recta entre 0.6 rad/seg
y 60 rad/seg
- **Polo en 18 rad/seg :**
Magnitud 0 dB para $w \leq 18 \text{ rad/seg}$ y -20 dB/dec para
 $w > 18 \text{ rad/seg}$.
Fase de -45° en $w = 18 \text{ rad/seg}$, 0° para $w \leq 18/10 \text{ rad/seg}$,
 -90° para $w \geq 10 \cdot 18 \text{ rad/seg}$, y una recta entre 1.8 rad/seg
y 180 rad/seg .

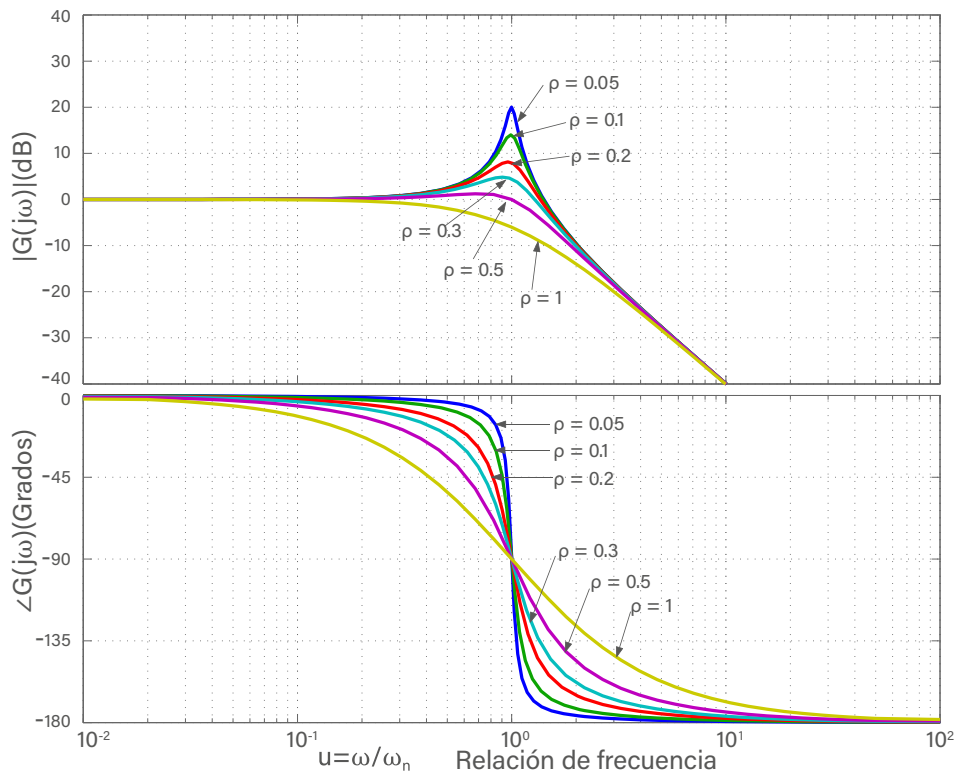


Figura 8.7: Aporte de polos y ceros complejos conjugados.

Gráfico polar y criterio de estabilidad de Nyquist

El gráfico polar muestra el trazo de los lugares de la parte real contra la parte imaginaria de la función de transferencia cuando se varía la frecuencia. Su trazo no es simple, por lo que se recomienda usar una herramienta de cómputo. En MATLAB® el comando que se debe usar es "Nyquist".

Considerando el lazo típico de la Figura 8.9, en la Figura 8.10 se muestra el gráfico de Nyquist típico de sistemas de primer orden (a la derecha del eje imaginario) y de primer orden con integración (a la izquierda del eje imaginario).

En la Figura 8.10 el vector desde el origen a un punto de la curva representa a $GH(j\omega)$ para una cierta frecuencia ω .

El vector desde el punto $(-1,0)$ a la gráfica de $GH(j\omega)$ forma un ángulo α con el eje real y tiene magnitud $|1 + GH(j\omega)|$, donde:

$$\frac{D(j\omega)}{C(j\omega)} = 1 + GH(j\omega)$$

es la función de transferencia sinusoidal entre el disturbio y la salida; esto es, la ecuación característica con $s = j\omega$; su inversa es la función de sensibilidad perturbación-salida S_{cd} .

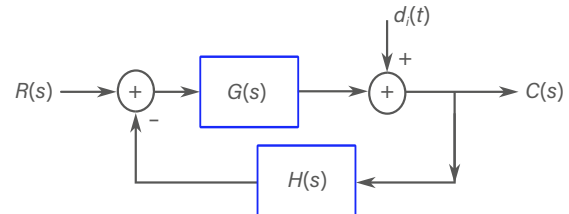


Figura 8.9: Lazo típico con disturbio a la salida

Nota 53. Si el lugar de $GH(j\omega)$ pasa por el punto crítico $(-1,0)$, la ecuación característica será nula en una frecuencia específica y el sistema en red cerrada no es asintóticamente estable; por tanto, una condición necesaria (pero no suficiente) para que el sistema sea asintóticamente estable, es que el lugar de $GH(j\omega)$ no pase por $(-1,0)$.▲

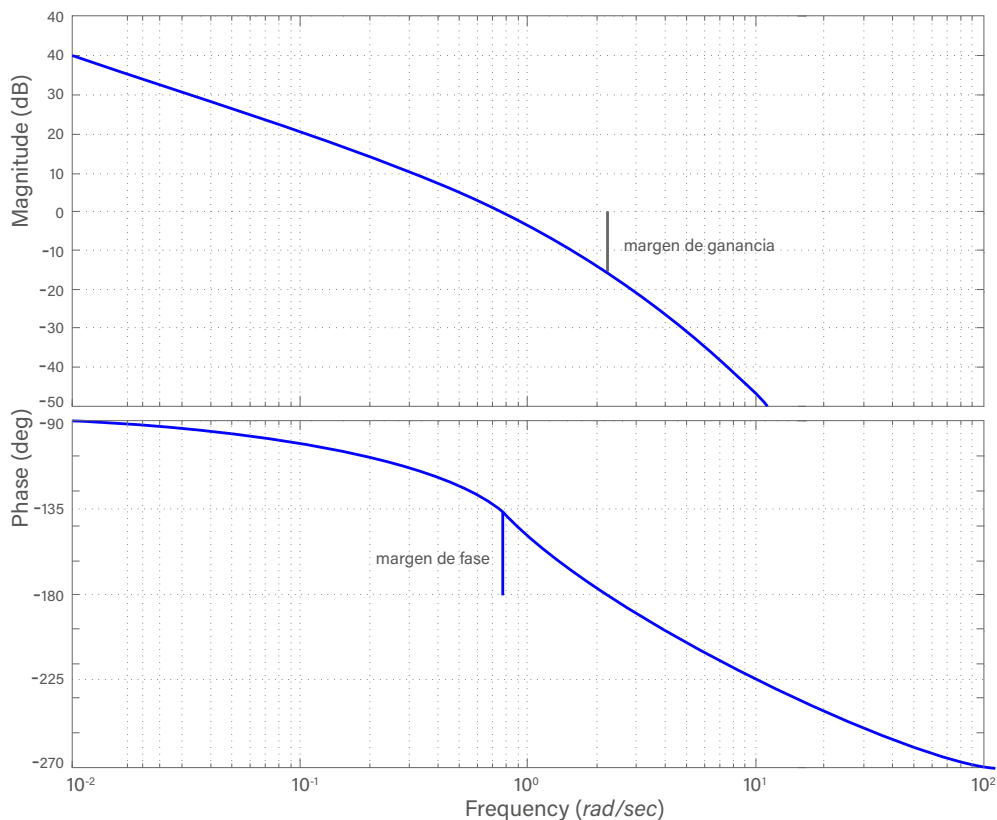


Figura 8.8: Diagramas de Bode de los márgenes de fase y de ganancia del Ejemplo 1.

El **criterio de Nyquist** establece condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad asintótica del sistema en red cerrada:

1. Para $GH(s)$ estable ($Re\{\text{polos de } GH\} \leq 0$), propia y de fase mínima, el lugar de $GH(j\omega)$ recorrido en el sentido de frecuencias crecientes, debe dejar a la izquierda el punto $(-1,0)$. Para sistemas de fase no mínima, esta es solo una condición necesaria.
2. Para $GH(s)$ inestable ($Re\{\text{polos de } GH\} > 0$) y propia, el lugar de $GH(j\omega)$ recorrido en el sentido de las frecuencias crecientes, debe dejar a la izquierda el punto $(-1,0)$ y el número N de rodeos del punto crítico $(-1,0)$, en el sentido contrario a las manecillas del reloj, debe ser igual al número de polos inestables de red abierta. En general:

$$N = \underbrace{\# \text{ polos inestables RC}}_Z - \underbrace{\# \text{ polos inestables RA}}_P$$

3. Criterio generalizado⁸: para funciones de transferencia de red abierta $GH(s)$ propias, estables o inestables, de fase mínima o no-mínima, con P_w polos en el eje complejo, el ángulo total *recorrido* por α para frecuencias crecientes, debe ser positivo (contrario a las manecillas del reloj).

En general:

$$\alpha = (P - Z + 0.5P_w)180^\circ$$

Para estabilidad relativa, los márgenes de ganancia y de fase tratan de evaluar la cercanía de la curva de respuesta de frecuencia en la gráfica polar (lugar de Nyquist) al punto $(-1,0)$.

Respuesta en red cerrada, círculos M y carta de Nichols

La magnitud pico de frecuencia (M_{pw}), la frecuencia de resonancia (ω_r) y el ancho de banda (ω_c) se leen de la respuesta de frecuencia de red cerrada $T(j\omega)$. Los márgenes de ganancia (M_G) y de fase (M_ϕ) se leen de la respuesta de frecuencia de red abierta $GH(j\omega)$.

Se pueden obtener ambas curvas fácilmente con un computador; sin embargo, para el análisis y diseño, es conveniente obtener $T(j\omega)$ a partir de la función $GH(j\omega)$.

Si

$$H(j\omega) = 1, \quad G(j\omega) = U + jV$$

$$T(j\omega) = \frac{G}{1+G} = \frac{U + jV}{1 + U + jV}$$

la magnitud de la función de transferencia de red cerrada se puede calcular como

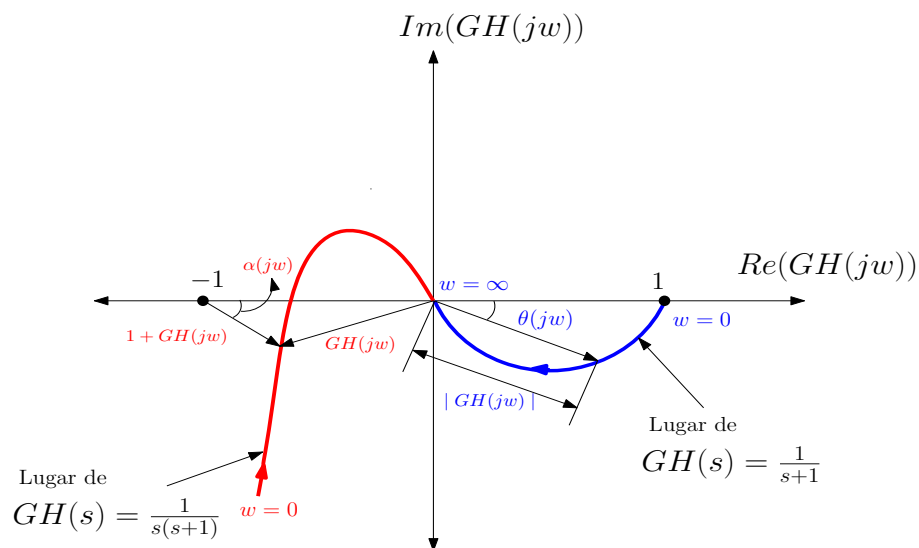


Figura 8.10: Trazos de Nyquist típicos para primer orden y primer orden con integración.

$$M(\omega) = |T(j\omega)| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1+U)^2 + V^2}}$$

Manipulando, se puede escribir la relación

$$\left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2 = \left(U - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + V^2$$

Esta ecuación describe una familia de círculos de magnitud de red cerrada con M constante en el plano de G , con centro en

$$\left(\frac{M^2}{1-M^2}, 0\right) \text{ y radio } \left|\frac{M}{1-M^2}\right|$$

La representación gráfica de los círculos M en la gráfica polar se aprecia en la Figura 8.11 para círculos $M = 0.5, 0.7, 1.5$ y 2 . La intersección de la gráfica polar de $G(j\omega)$ con el círculo de M constante, da la magnitud de $T(j\omega)$ en la frecuencia indicada para $G(j\omega)$; así, el círculo de mayor M tangente a $G(j\omega)$ corresponde a la magnitud pico de frecuencia $M_{P\omega}$ y la frecuencia en el punto de tangencia corresponde a la frecuencia de resonancia ω_R (ver Figura 8.11).

Se observa cómo los círculos M a la derecha del eje $u = -\frac{1}{2}$ corresponden a valores de $M < 1$ y los círculos a la izquierda corresponden a círculos con $M > 1$. El eje $u = 1$ corresponde a $M = 1$.

De forma similar se obtienen los círculos N de fase constante para $T(j\omega)$. En Dorf (1989) se lee una expli-

cación de la lectura de la respuesta de red cerrada a partir de la respuesta de red abierta en frecuencia.

Considere un sistema con repuestas de frecuencia y con valores de ganancia $K_2 > K_1$, como se muestra en la Figura 8.12.

Observe que para la ganancia K_1 la respuesta en red cerrada tiene su máximo pico de resonancia M_1 en ω_{R_1} y cuando se sube la ganancia a K_2 , el pico de resonancia se incrementa a M_2 en ω_{R_2} ; además, el sistema en red cerrada con ganancia K_2 tiene magnitud M_1 en las frecuencias ω_1 y ω_2 . En la Figura 8.12b se observa cómo adicionalmente se encuentra el ancho de banda $\omega_{B\omega}$; este dato también se extrae de la curva de Nichols en el valor de $-3dB$.

Nichols pasó los círculos de M y N constantes del plano polar al plano de Black y obtuvo lo que se conoce como la carta de Nichols. En la Figura 8.13 se muestra la carta de Nichols para un caso particular. En ella se tienen los contornos de $M[db]$ y $N[^\circ]$ constantes, en ejes coordenados de Mdb vs ϕ° , observe en líneas punteadas cortas el trazo para un "círculo" $M = 1dB$ y en trazos largos para el "círculo" con $M = -3dB$ de fase constante $\phi = -72^\circ$.

Para entender su uso se replica el ejemplo a continuación.

Ejemplo 3.

Evaluar $M_{P\omega}$, ω_R y ω_c para el sistema de control de la excitación con acción integral y excitatriz, $\tau_G = 1$, $\tau_E = 0.2$ y $k_I = 1$

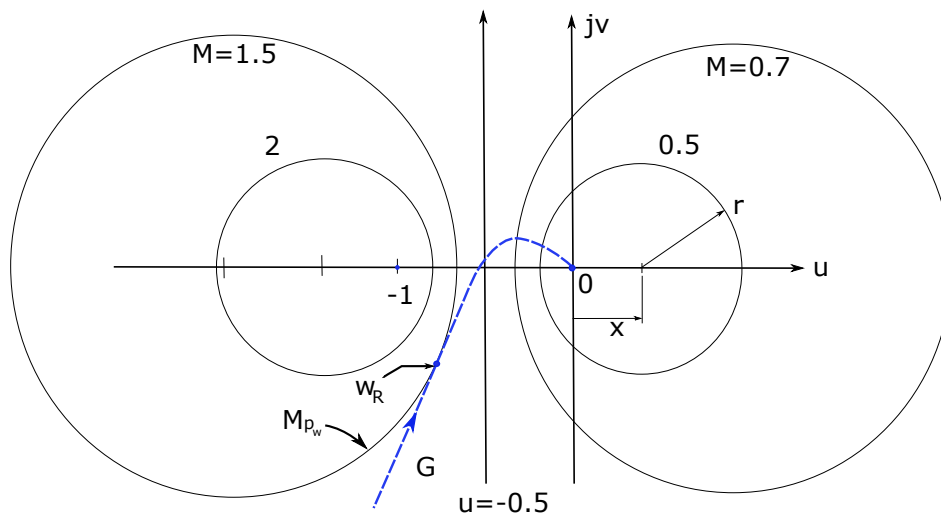


Figura 8.11: Círculos para valores de M constantes en la gráfica polar.

$$G_N = \frac{1}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

El trazo se obtiene con la ayuda de MATLAB® (ver Figura 8.13). El contorno de M constante de mayor valor está entre 2 y 3 db , luego $M_{Pw} \cong 2.5 \text{ db}$ y la tangencia se da aproximadamente en $w_r \cong 0.8$.

Para el ancho de banda se observa que en baja frecuencia se sigue la curva M de 0 db ; luego el ancho de banda será en el corte con el contorno M de -3 db : $w_c = 1.35$.

Los M_G y M_ϕ se leen de los ejes de Black; el de ganancia, como la distancia de G en 0 db al corte con $\phi_G = -180^\circ$; el de fase, como la distancia entre $\phi_G = -180^\circ$ y el corte con $G = 0 \text{ db}$.

Análisis de error usando gráficos de Bode

Recordando que los errores permanentes se calculan cuando el tiempo tiende al infinito, o su equivalente, cuando la frecuencia "s" tiende a cero; y con la Tabla 8.1, donde se resume el listado de errores de estado estacionario para diferentes entradas y números tipo. Al considerar que el control (G_c) en cascada con la planta (G), de acuerdo con la forma de Bode (ecuación 8.5), en bajas frecuencias ($s \rightarrow 0$), da una función

$$G_c G \approx \frac{K_B}{(jw)^n}$$

Tabla 8.1: Error permanente.

Entrada / Tipo	n = 0	n = 1	n = 2
$r = 1/s$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
$r = 1/s^2$	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
$r = 1/s^3$	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$

En el trazo de Bode se puede ver que para $n = 0$, la asíntota (de baja frecuencia) es una constante, y por la Tabla 8.1 el sistema presenta un error permanente ante una entrada tipo escalón, y no será capaz de seguir entradas del tipo rampa y aceleración. De forma análoga se sigue para los casos tipo 1 y 2, siguiendo la Tabla 8.1. Por lo que, por simple inspección de las asíntotas de baja frecuencia en el gráfico de Bode, es posible conocer la constante de posición, de velocidad o de aceleración.

Sea por ejemplo las Figuras 8.14, 8.15 y 8.16 donde se muestran los diagramas de Bode para sistemas tipo 0, tipo 1 y tipo 2.

Para G1 la asíntota en bajas frecuencias muestra una ganancia 20 $\log K = 20$ por lo que $K_p = K = 10$ y

$$\begin{aligned} e_{ssp} &= \frac{1}{1+K_p} \\ &= \frac{1}{1+10} \\ &= 0.09 \end{aligned}$$

Para el gráfico de G2 (Figura 8.15) se observa una pendiente de bajas frecuencias de -20 dB/dec , por lo que el sistema tiene un polo en $s = 0$ o es tipo 1.

Al ser el sistema tipo 1, la contribución en $w = 1 \text{ rad/s}$ es aproximadamente 20 dB , la ganancia normalizada es de $20 \log K_v = 20 \text{ dB}$, o sea, $K_v = 10$ y corresponde al término de velocidad; por lo que el error permanente es de

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{10} = 0.1$$

De forma similar, para G3 (Figura 8.16) la pendiente en bajas frecuencias es de -40 dB/dec , correspondiendo a un sistema tipo 2. La ganancia normalizada es de $20 \log K_a = 20 \text{ dB}$ y el error permanente de aceleración es

$$e_{ssa} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Obtención experimental de funciones de transferencia

En términos simples, la función de transferencia de una planta se puede obtener al aplicar una señal de entrada escalón con una amplitud y frecuencia constante, y con un registrador de señal (o un osciloscopio) conocer la amplitud de la salida y el cambio de fase.

El experimento se repite desde frecuencias bajas, idealmente cero, hasta una frecuencia considerablemente alta para el sistema.

Un paso muy importante para realizar esta tarea es definir los rangos de frecuencia a los que se va a realizar el experimento y la instrumentación adecuada.

La amplitud de la señal de entrada puede superponerse a la señal de operación del proceso, de manera que la identificación se puede hacer sin sacar de operación el sistema (en línea). La amplitud de la señal de entrada debe ser lo suficientemente grande como para sacar el sistema de posibles zonas muertas, y no tan grande como para sacar el sistema de zona lineal. El equipo para medición debe tener una curva de magnitud versus frecuencia muy plana para no introducir

ruidos en los datos y el ángulo de fase debe ser –idealmente– proporcional a la frecuencia.

Después de registrados los valores entre las amplitudes de salida a entrada (preferiblemente en dB) y el cambio de fase, para los diferentes valores de frecuencia (en escala logarítmica) en los que se corrieron los experimentos, se procede a realizar las gráficas; estas gráficas se construyen identificando asíntotas y cruces de asíntotas. Los cruces de las asíntotas permiten ubicar los aportes de los polos y los ceros. Para el caso particular de los polos o ceros en el origen, estos se extraen de las asíntotas de baja frecuencia.

Como se ha manifestado hasta este punto, un cero en el origen aporta $+20 \text{ dB/dec}$, un polo en el origen aporta -20 dB/dec y, como se vio, la multiplicidad (N) de estos ceros o polos aporta $\pm 20N \text{ dB/dec}$, respectivamente.

Debe tenerse claro si el sistema bajo estudio está en lazo abierto; si es así, podrá calcular directamente la función de transferencia de la planta. Si está en lazo cerrado, deberá considerar cálculos adicionales para obtener $G(s)$.

Diseño de compensadores

Usualmente, las especificaciones de desempeño de los sistemas vienen dadas en el dominio del tiempo; sin embargo, es posible llevarlas a especificaciones en el dominio de frecuencia asumiendo sistemas con dinámicas dominantes de segundo orden.

En el dominio de la frecuencia para el ajuste del PID, se pueden considerar los aportes de cada parte de ellos en los gráficos de Bode; también se pueden diseñar compensadores a través del cálculo de redes de adelanto-atraso de fase.

Antes de emprender la tarea del diseño de un compensador o un controlador, se deben tener claras las especificaciones deseadas de funcionamiento en el dominio de la frecuencia (ancho de banda, M_G , M_ϕ , constantes de error, pico de resonancia...); posteriormente se realiza el gráfico de Bode y se verifica el cumplimiento de los requerimientos. Si es posible ajustar los requerimientos con solo modificar la ganancia se procede; de lo contrario, es necesario analizar primero las especificaciones de estado permanente buscando conocer si es necesario aumentar el tipo del sistema. Una vez cumplidas las especificaciones en régimen permanente se analiza si para cumplir los desempeños dinámicos es necesario adicionar o restar fase al

sistema. A continuación se ve esto a través de algunos casos.

Ajuste de ganancia

Como se mencionó en el párrafo anterior, si para cumplir las especificaciones de funcionamiento es suficiente con ajustar la ganancia, el efecto es equivalente a ajustar un controlador proporcional K_p donde $u(s) = K_p e(s)$. Esta acción solo moverá la ganancia del sistema y no modificará la fase.

Para ilustrar (ver Figura 8.17) se emplea la función de transferencia de la planta en lazo abierto, que corresponde a

$$G_3 = \frac{1080}{s^3 + 24s^2 + 108s}$$

Se observa cómo al aumentar la ganancia aumenta el ancho de banda, pero disminuye el margen de fase y por consiguiente la estabilidad relativa. Para $G_3(s)$ se desea que el sistema en red cerrada presente error permanente nulo, sobrepaso menor del 20 % y tiempo de estabilización menor de 2 seg. La planta presenta un polo en el origen (tipo 1), por lo que en lazo abierto ante entrada escalón, la salida seguirá un comportamiento creciente tipo rampa. Para estabilizarla, al cerrar el lazo con una ganancia del controlador unitaria y realimentación unitaria, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$T_{3/b} = \frac{1080}{s^3 + 24s^2 + 108s + 1080} \quad (8.8)$$

Se puede observar que ahora el sistema en red cerrada es tipo cero (ecuación 8.8) con respuesta al escalón, como se aprecia en la Figura 8.18.

El sistema se estabiliza en 1, con un tiempo de establecimiento de 2.66 seg y M_p de 51.6 %, los cuales no cumplen con las especificaciones.

Para un sistema con polos dominantes de segundo orden y que requiere un $M_p < 20 \%$, $\rho > 0.5$ y $M\phi > 100\rho = 50^\circ$, es necesario ajustar la ganancia del controlador para que de una atenuación de aproximadamente 10 dB tal que

$$\begin{aligned} 20 \log(1080/6 * 18) * K_p &= 20 \log(1080/6 * 18) - 10 \text{ dB} \\ 20 \log K_p &= -10 \text{ dB} \end{aligned}$$

de donde $K_c = 0.31622$, con lo que la nueva ganancia de lazo directo es

$$K' = 1080 * K_p = 341.53$$

Al trazar de nuevo la respuesta con la nueva ganancia, en la Figura 8.19 se verifica el cumplimiento de los requisitos.

Igualmente, de las curvas 8.17 se observa que la curva con $k' = 367.6$ cumple los requerimientos.

Controlador PI

La función del controlador PI se representa como G_{PI} y el gráfico de Bode se aprecia en la Figura 8.20.

$$G_{PI} = K_p + \frac{K_i}{s} \\ = K_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i} s}{s}$$

En la Figura 8.20, a la izquierda, se presentan las curvas de magnitud y a la derecha las curvas de fase; a trazos se presentan los aportes individuales y en línea continua la curva total.

Para el diseño del controlador PI en respuesta de frecuencia el proceso es simple, primero se adiciona el polo en el origen y se realiza la nueva gráfica de Bode para analizar si se cumplen las especificaciones de desempeño dinámico.

Posteriormente, se ajusta la ubicación del cero, buscando obtener el adelanto necesario para ajustar el margen de fase. Es recomendable realizar la ubicación del polo en frecuencias por debajo del cruce de ganancia cero para que el compensador reste la menor cantidad posible de grados sobre el nuevo margen de fase del sistema compensado.

Otra técnica consiste en primero adicionar un ángulo de tolerancia ($\approx 10^\circ$) al margen de fase deseado ($M'_{\phi d} = M_{\phi d} + 10^\circ$); luego, ubicar sobre la curva de fase del sistema sin compensar, la frecuencia (w'_g) a la que se obtiene este margen de fase deseado ($M'_{\phi d}$).

Finalmente, ubicar el cero del compensador una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia ($K_p/T_i = w'_g/10$). Después realizar los pequeños ajustes, si son necesarios ("ajuste fino").

Controlador PD

La función del controlador PD se representa como

$$G_{PD} = K_p + K_d \cdot s \\ = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right)$$

En la Figura 8.21 se observa que el controlador aporta adelanto de fase de hasta 90 grados a partir de una década por encima de la frecuencia K_p/K_d y aporta $+20$ dB/dec.

La inclusión del compensador PD aumenta el margen de fase, logrando a su vez mejorar la estabilidad relativa. La ubicación de la frecuencia de cruce es clave, ya que al introducir el compensador PD en una frecuencia de interés se busca aumentar margen de fase, pero el cambio positivo en la pendiente de la magnitud "jala" la frecuencia de cruce de ganancia hacia la derecha, lo que decrece de nuevo el margen de fase.

Así que, finalmente, el PD mejora margen de fase pero de manera conservadora.

La ubicación de la frecuencia de corte del PD estará a la izquierda de w'_g ; el lugar exacto se debe establecer gráficamente, observando que si se ubica una década por debajo de w_g el aporte de fase inicialmente es $+90^\circ$, pero este valor se atenúa por el desplazamiento hacia la derecha de w_g . El proceso es de ensayo y error y las herramientas de simulación son fundamentales para esta labor.

Controlador PID

En el dominio de la frecuencia la función de transferencia se implementa como compensadores PI-PD, como se ve a continuación

$$G_{PID} = (1 + K_d \cdot s) \left(K_{p2} + \frac{K_{i2}}{s} \right)$$

El diseño considera la combinación de los diseños de los compensadores PI y PD.

El PI aumenta el margen de fase y reduce la frecuencia de transición del sistema, mientras que el compensador PD aumenta el margen de fase (en una menor cantidad con respecto al PI) y aumenta la frecuencia de transición del sistema.

Así que el PI-PD aumenta el margen de fase del sistema y mejora o conserva la velocidad de respuesta.

Compensador en adelanto de fase

Considerando la aproximación presentada en Ogata (1993), con estructura para la red de adelanto expresada como

⁷ El margen de fase deseado está normalmente a la izquierda del margen de fase w_g .

$$G_{cad}(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

con un cero en $s = -1/T$ y el polo en $s = -1/(\alpha T)$. Observe que al ubicar el cero a la derecha del polo, el aporte en fase del cero es mayor que el aporte del polo, por lo que a esta relación se le conoce como de adelanto de fase. La ganancia K_c se usa para ajustes finos y para ajustes de error permanente. Asumiendo $K_c = 1$ y representando el sistema en el dominio de frecuencia

$$G_{cad}(j\omega) = \alpha \frac{1 + j\omega\alpha T}{1 + j\omega T}$$

Para ilustración, se muestran en la Figura 8.22 los aportes en magnitud y fase del compensador en adelanto.

Observe cómo la red de adelanto de fase puede proporcionar un máximo de ϕ_m en la frecuencia ω_m ; el máximo adelanto de fase depende del valor de la constante α .

Para la Figura 8.22, $\phi_m = 60^\circ$, recuérdese que ϕ_m se obtiene del análisis polar de la red de adelanto, tal que

$$\sin(\phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (8.9)$$

La frecuencia ω_m es la media geométrica de las dos frecuencias de cruce $1/T$ y $1/\alpha T$.

$$\log \omega_m = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right)$$

luego

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (8.10)$$

En este valor de ω_m el aporte en magnitud del compensador es

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T} \right|_{\omega_m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (8.11)$$

por lo que en decibels aporta

$$20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

El proceso de diseño es el siguiente:

1. Calcule el valor de la ganancia de lazo abierto K del sistema con compensador para cumplir las especificaciones de error permanente del sistema

$$G_c(s)G_p(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G_p(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G(s)$$

donde

$$G(s) = KG_p(s)$$

y

$$K = K_c \alpha$$

2. Para el sistema con la K ajustada, trace el diagrama de Bode, determine si el sistema cumple las especificaciones de desempeño estático y dinámico; si no cumple, determine el margen de fase.
3. A partir de los requerimientos de desempeño dinámico determine el margen de fase necesario, con ese dato determine la fase que necesita adicionar a su sistema, sume una fase adicional de aproximadamente 5° .
4. A partir de 8.9, determine la ubicación del polo y el cero; considere que

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m}$$

y ubique en el sistema sin compensar el valor donde la magnitud es

$$-20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

ubique la frecuencia y esta será su nueva frecuencia de cruce de ganancia ($\omega_c = \omega_m$); el cambio máximo de fase, incluyendo el factor de ajuste, ocurre en esta frecuencia.

5. Conocida ω_c y α , usando 8.10 calcule la ubicación del cero, para ello hay que determinar T , y

$$\frac{1}{T} = \omega_c \sqrt{\alpha}$$

Después calcule la ubicación del polo

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}}$$

6. Calcule la constante del compensador:

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

7. Verifique el desempeño estático y dinámico; si no cumple, realice ajustes finos.

Compensador en atraso de fase

Considerando la aproximación presentada en Ogata (1993) con estructura para la red de atraso expresada como

$$G_{cad}(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1) \quad (8.12)$$

con un cero en $s = -1/T$ y el polo en $s = -1/(\beta T)$.

Obsérvese que al ubicar el polo a la derecha del cero, el aporte en fase del polo es mayor que el aporte del cero, por lo que a esta relación se le conoce como de atraso de fase.

Para ilustración, se muestran en la Figura 8.23 los aportes en magnitud y fase del compensador en atraso. Observe cómo la red de atraso de fase puede proporcionar un máximo de ϕ_m en la frecuencia w_m ; el máximo atraso de fase depende del valor del factor β .

Para la Figura $\phi_m = -60^\circ$, ϕ_m se obtiene del análisis polar de la red de atraso, de forma análoga a la red de adelanto, tal que

$$\sin(\phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (8.13)$$

la frecuencia w_m es la media geométrica de las dos frecuencias de cruce $1/\beta T$ y $1/T$.

$$\log w_m = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\beta T} \right)$$

El proceso de diseño es el siguiente:

1. Calcule el valor de la ganancia de lazo abierto K del sistema con compensador para cumplir las especificaciones de error permanente del sistema

$$G_c(s)G_p(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G_p(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G(s)$$

donde

$$G(s) = KG_p(s) \quad \text{y} \quad K = K_c \beta$$

2. Para el sistema con la K ajustada, trace el diagrama de Bode, determine si el sistema cumple las especificaciones de desempeño estático y dinámico; si no cumple, determine el margen de fase.
3. A partir de los requerimientos de desempeño dinámico, determine la fase necesaria y súmele un valor adicional de aproximadamente 5° a 12° considerando lo que atenuará el compensador en atraso. Esta fase adicional se ubica en la curva de fase a la frecuencia donde se pueda obtener el margen de fase más la compensación; esta será la frecuencia de cruce de ganancia w_g .
4. Para evitar los efectos fuertes del compensador en atraso, el polo y el cero deberán ubicarse en frecuencias muy inferiores a la frecuencia de cruce de ganancia. Se recomienda ubicar el cero del compensador ($1/T$) en una octava o una década por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia.
5. Calcule la atenuación que se necesita para bajar la curva de magnitud a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia, considerando que en w_m el compensador en atraso atenúa $-20 \log \beta$. De ahí

Tabla 8.2: Materiales y equipos.

Hardware			
Cantidad	Nombre	Marca / Modelo	Especificaciones
1	PC	Intel / AMD	Procesador: para trabajar con MATLAB® local: Intel I5 o Ryzen 5, para MATLAB® online: Intel I3 o Ryzen 3. Memoria RAM: 8 GB. Espacio en disco duro: 20 GB.
Software			
1	Software	MATLAB®	Versión 2019 o superior.
1	Software	LabVIEW®	Versión 2020 o superior.

puede calcular β y luego puede ubicar el polo del compensador en

$$w = \frac{1}{T\beta}$$

6. Calcule la nueva ganancia del compensador a partir de

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$

Materiales y equipos

En la Tabla 8.2 se listan los elementos necesarios para realizar la experimentación.

Procedimiento

Extracción de la respuesta de frecuencia

En este punto se debe tener una planta, sujeto de estudio asignada por su instructor o profesor.

Debe conocer el punto de operación y los rangos lineales de trabajo.

1. Diseñe las señales que va a emplear para el barrido de la frecuencia (amplitud, rango de variación de frecuencias y número de puntos del experimento.)
2. Implemente la entrada sinusoidal sobre el valor de operación de la planta.

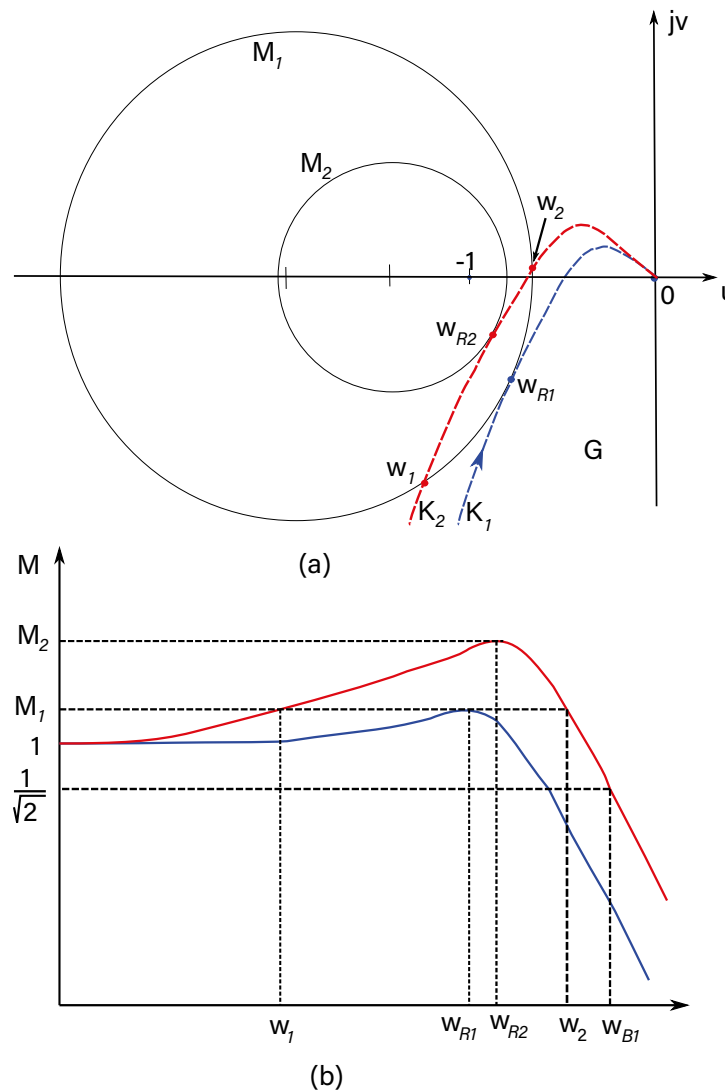


Figura 8.12: Gráfico de Nyquist para dos valores de una ganancia.

3. Realice la toma de los datos registrando la frecuencia, la entrada y la salida.
4. Procese los datos para obtener la magnitud en decibels y la fase en grados.
5. Analice el desempeño estático de su sistema y con su profesor o equipo de trabajo, establezcan los nuevos requerimientos de desempeño dinámico y estático en lazo cerrado.

Ajuste de controlador PID

6. Usando la técnica de respuesta en frecuencia, diseñe el compensador P, PI, PD o PID que le permita cumplir los requerimientos de desempeño.

Ajuste de compensador

7. Usando compensador de adelanto-atraso de fase, diseñe el compensador que le permita cumplir los requerimientos de desempeño.

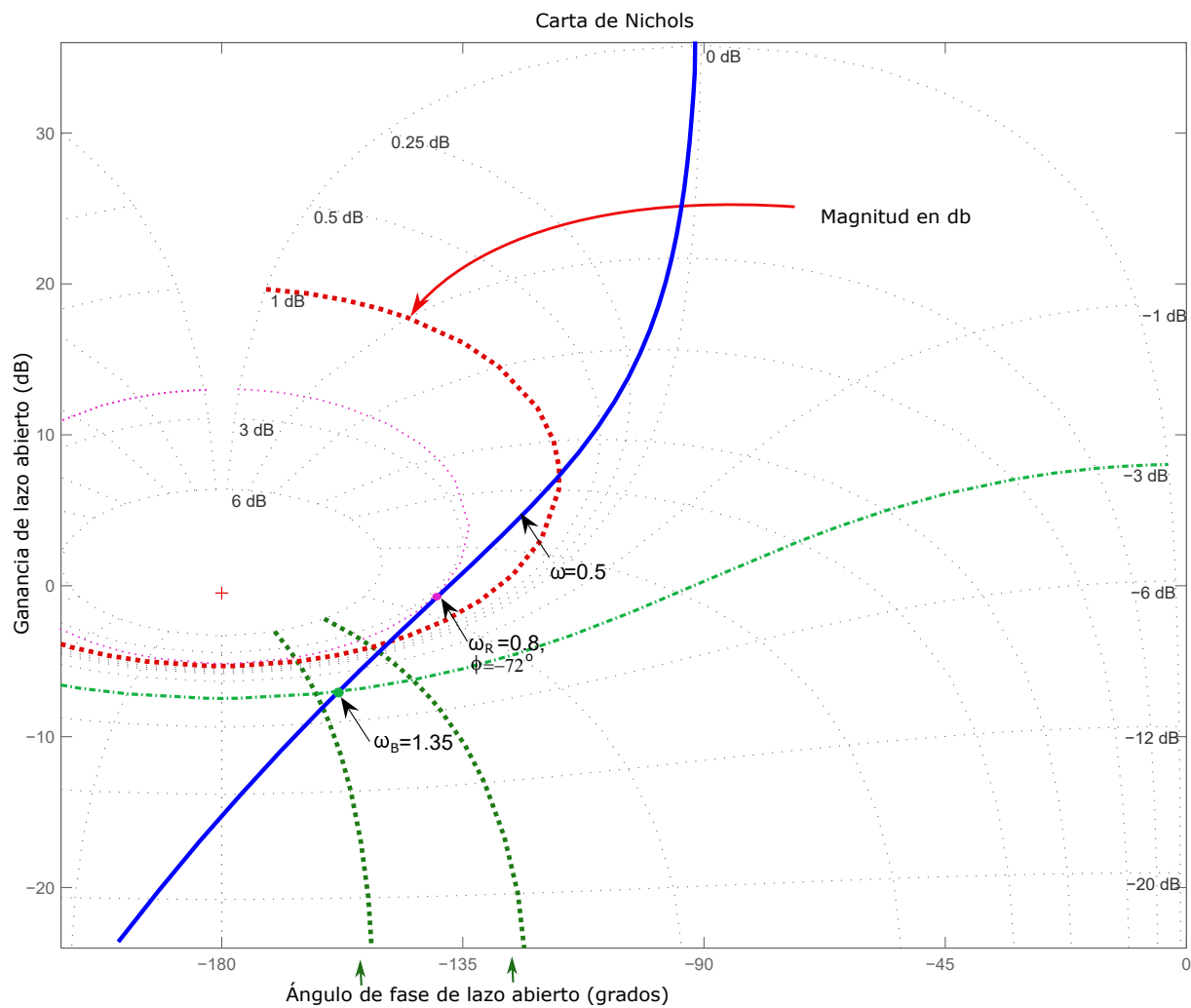


Figura 8.13: Trazo Nichols para G_v

Informe

Elabore su reporte donde, de forma estructurada, organizada y profesional, informe los datos obtenidos en

cada punto del procedimiento. Compare los desempeños logrados con los controladores diseñados, reporte el análisis de sus resultados y las conclusiones.

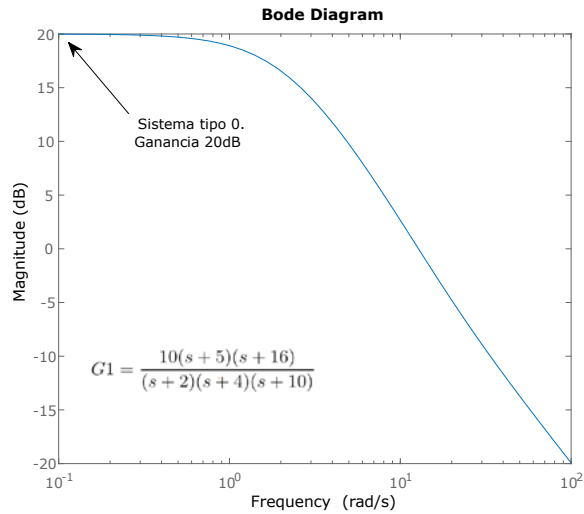


Figura 8.14: Trazo de magnitud de Bode para $G_1(s)$.

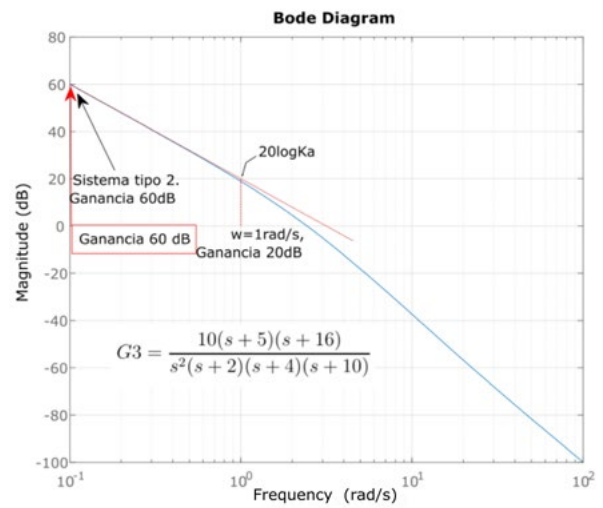


Figura 8.16: Trazo de magnitud de Bode para $G_3(s)$.

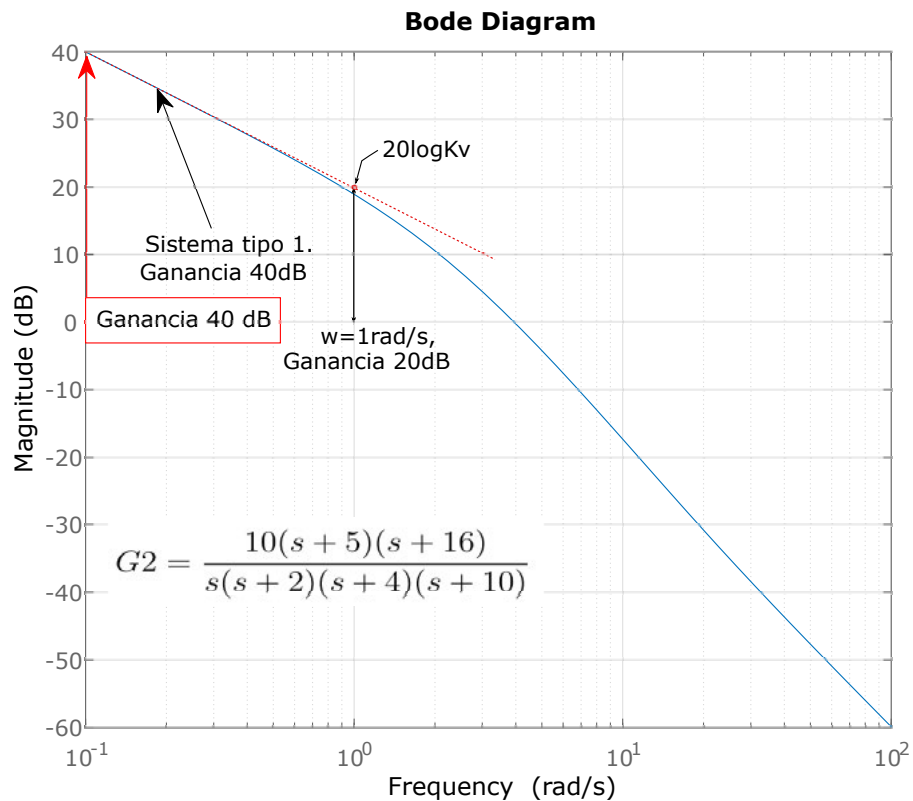


Figura 8.15: Trazo de magnitud de Bode para $G_2(s)$.

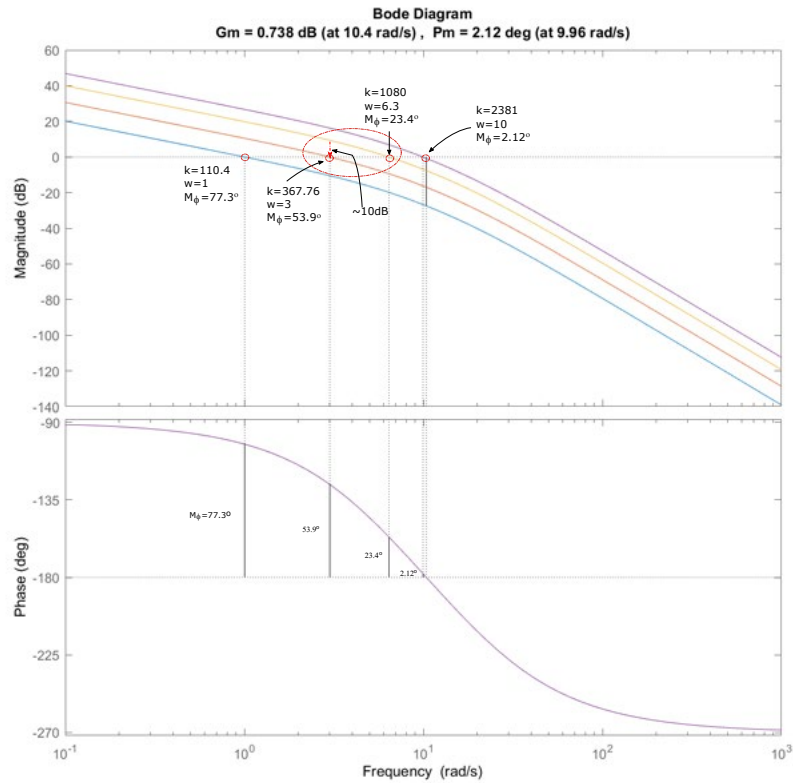


Figura 8.17: Efecto de variaciones de la ganancia en el gráfico de Bode para $G_3(s)$.

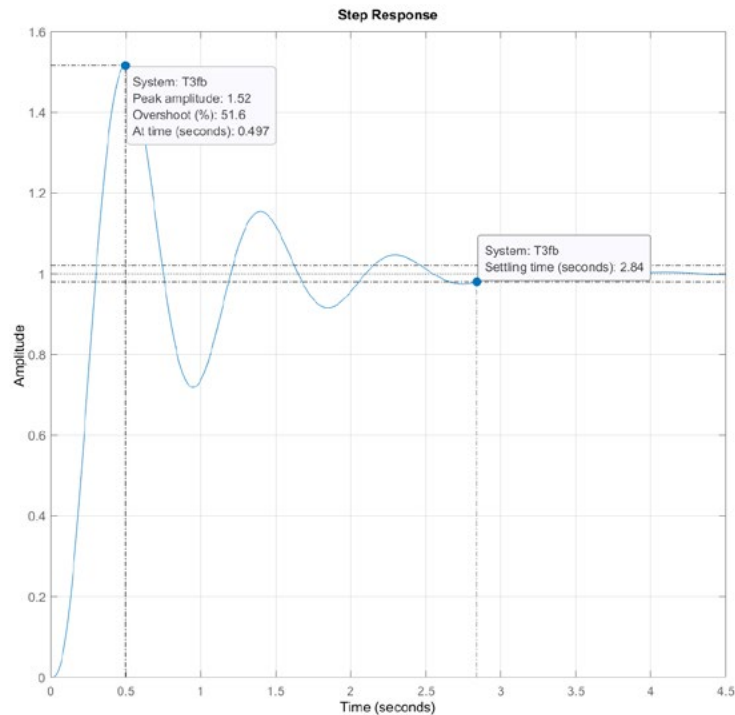


Figura 8.18: Respuesta en red cerrada para $G_3(s)$ con controlador unitario y realimentación unitaria.

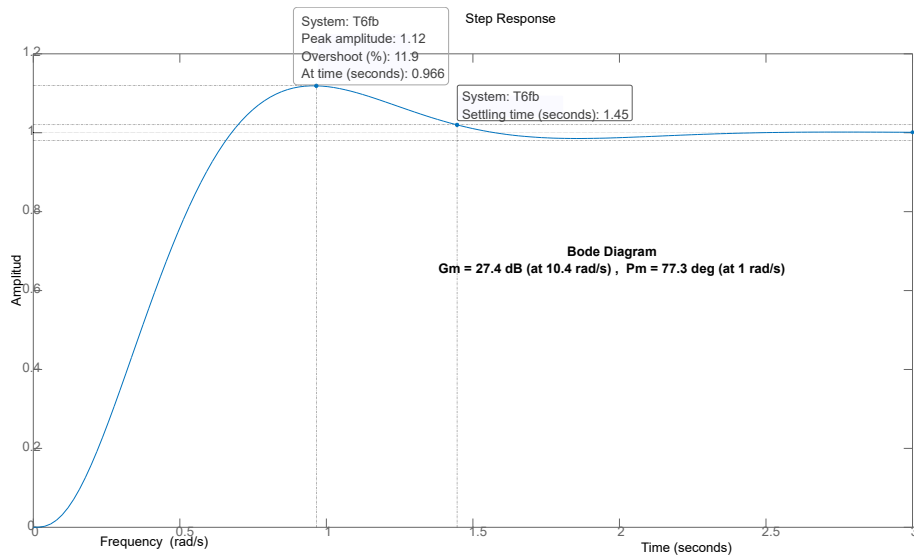


Figura 8.19: Control proporcional de $G_3(s)$ con $K_p = 0.31623$, $k' = 341.530$

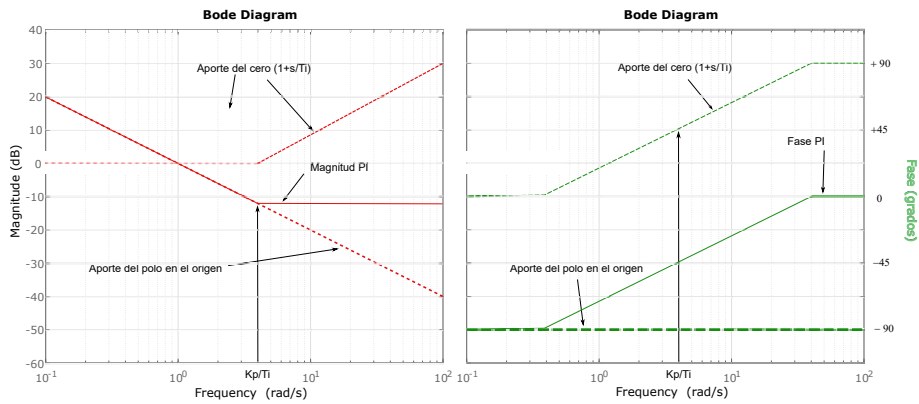


Figura 8.20: Asíntotas de magnitud y fase de controlador PI.

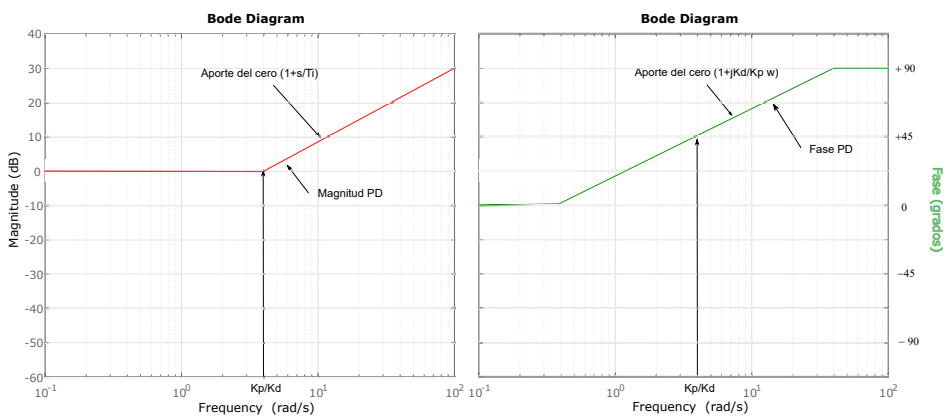


Figura 8.21: Asíntotas de magnitud y fase de controlador PD, a la izquierda se presenta la curva de magnitud y a la derecha la curva de fase.

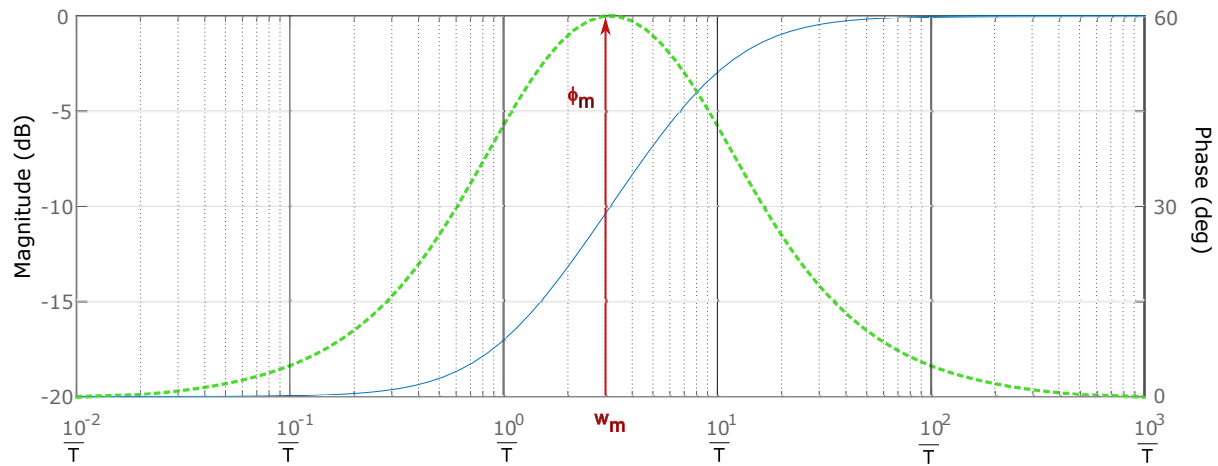


Figura 8.22: Red de adelanto de fase. En línea continua la magnitud y en línea a trazos la fase.

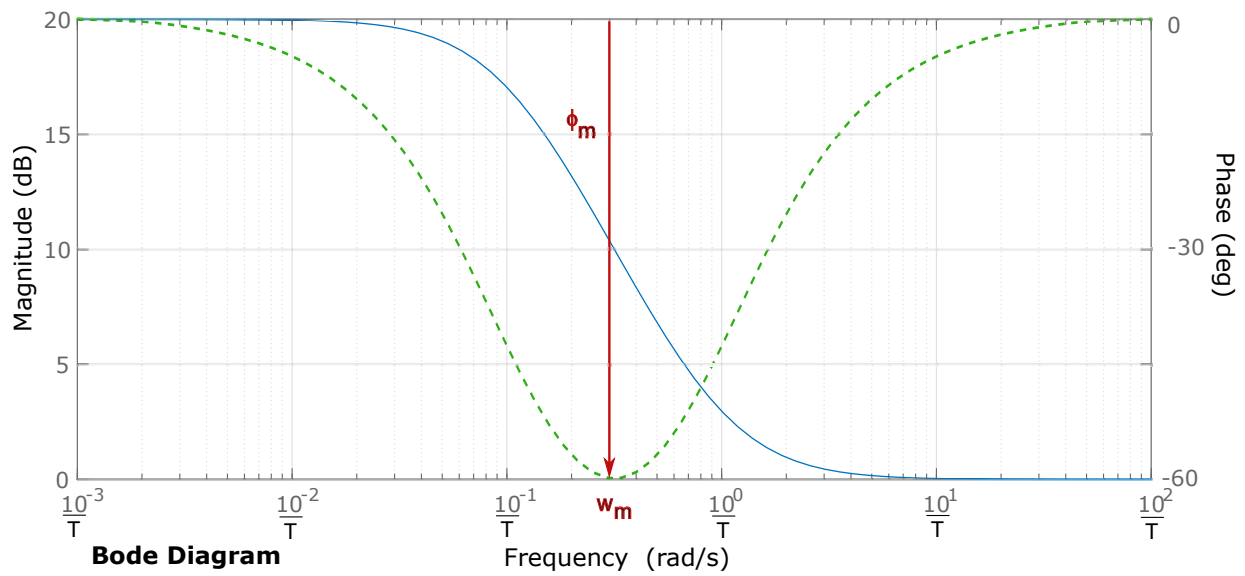


Figura 8.23: Red de atraso de fase. En línea continua la magnitud y en línea a trazos la fase.