

Capítulo 7

ANÁLISIS Y COMPENSACIÓN EN DOMINIO DEL TIEMPO CON LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

 <https://doi.org/10.25100/peu.1416.cap7>

En el diseño de un SAC, el ajuste de los parámetros del controlador cambia las posiciones de los polos y ceros de lazo abierto (LA), buscando ubicar los polos de lazo cerrado (LC) en las posiciones deseadas del plano “s”.

El lugar geométrico de las raíces (LGR) es el trazo de las raíces de la ecuación característica, para distintos valores de un parámetro del sistema, normalmente la ganancia.

Objetivos y resultados de aprendizaje

Objetivo general

Explicar la técnica del lugar geométrico de las raíces y su aplicación para el análisis y diseño de compensadores en SAC.

Objetivos específicos

- Detallar la técnica del lugar geométrico de las raíces.
- Mostrar los compensadores de adelanto y atraso de fase.
- Mostrar el efecto de la modificación de la ganancia sobre el lugar geométrico de las raíces.
- Mostrar el efecto de la adición de polos y ceros en el LGR y la respuesta transitoria.
- Mostrar el cálculo de la región deseada de los polos en red cerrada.
- Mostrar el procedimiento de ajuste de los compensadores, adicionando polos y ceros en el lugar geométrico de las raíces.

Resultados de aprendizaje

Al finalizar, el estudiante:

- Traza el LGR a partir de polos y ceros de lazo abierto para el análisis y diseño de SAC.
- Utiliza la técnica del LGR para el análisis de SAC.
- Ajusta controladores PID usando el método del LGR para el control de SAC.
- Ajusta compensadores dinámicos de adelanto y atraso de fase usando el método del LGR para modificar el desempeño estático y dinámico de SAC.

Marco teórico

Las características básicas de la respuesta transitoria de un sistema de lazo cerrado (LC) las determinan los polos de LC. Ya que los polos de LC son las raíces de la ecuación característica (EC), es importante para el análisis conocer los efectos en la ubicación de las raíces de LC cuando cambia un parámetro en la EC.

Lugares geométricos de sistemas típicos

Para entender el concepto del lugar geométrico de las raíces, se toma como caso de estudio la planta, o sistema, modelado por un integrador puro (polo en el origen). En la Figura 7.1, a la izquierda, está la representación en lazo abierto de la planta bajo estudio y a la derecha se muestra el diagrama de bloques cuando se cierra el lazo, donde se asume que el parámetro que se varía es la ganancia $K > 0$.

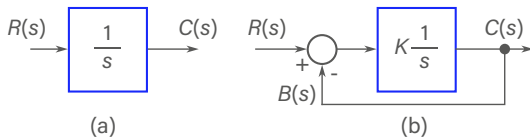


Figura 7.1: Planta integradora en (a) lazo abierto y (b) en lazo cerrado.

$$T(s) = \frac{G}{1+G} = \frac{K}{s+K} \quad (7.1)$$

Observe en la Figura 7.1, a la izquierda, que para el lazo abierto el polo está en $s = 0$; cuando se cierra el lazo (Figura 7.1, a la derecha), los polos se desplazan a $s = -K$; esto es, con la función de transferencia en el lazo cerrado (ecuación 7.1) se observa cómo ahora los polos se mueven hacia la parte izquierda del eje $j\omega$ del plano complejo conjugado (Figura 7.2), exactamente en $s = -K$; en la medida en que la ganancia K se incrementa, los nuevos polos se alejan más hacia la izquierda (Figura 7.2, izquierda).

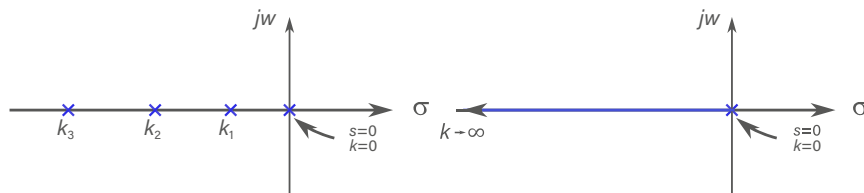


Figura 7.2: Lugares polos planta con integrador puro.

Si se toman tres valores para K nuevos, se obtienen tres polos nuevos en $s_1 = K_1$, $s_2 = K_2$, $s_3 = K_3$ donde $K_3 > K_2 > K_1$ (ver la ubicación en la Figura 7.2). Si se toman infinitos valores de K desde cero hasta infinito, se puede trazar una línea recta que inicia en el polo de lazo abierto $s = 0$ y termina en el infinito (en este caso en el polo en el infinito $s = \infty$).

El conjunto de todos esos nuevos posibles polos en función de la ganancia es lo que se conoce como el lugar geométrico. Como se ve en la Figura 7.2, derecha, para el parámetro K variando desde 0 hasta ∞ los polos de red cerrada se moverían desde el cero hasta $-\infty$.

Tomando como otro caso de estudio una planta con una integración en el origen y un polo en -1 , como se muestra en la Figura 7.3 y en lazo cerrado con

$$EC: s^2 + s + K = 0.$$

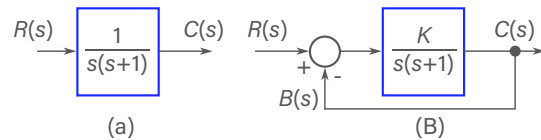


Figura 7.3: Lugares de planta con integrador puro y polo en $s = -1$.

Los polos se encuentran usando

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

Si $K = 0$ (solución muy simple) los polos se encuentran en $s = 0$ y $s = -1$, o se calculan como:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1}}{2} \begin{cases} (+) \rightarrow s = 0 \\ (-) \rightarrow s = -1 \end{cases}$$

Si $K \rightarrow \infty$, los polos se encuentran en

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{-\infty}{2}$$

Nota 39. Los polos en red cerrada son los mismos polos de lazo abierto cuando $K = 0$.▲

Nota 40. En el ejercicio anterior, para valores muy grandes de K , los polos de lazo cerrado tienen la parte real en $\sigma_{s_{1,2}} = -1/2$ y la parte imaginaria tiende a $\pm\infty$.▲

Nota 41. El conjunto de todos los polos de red cerrada da un trazo en una línea, a esa línea se le conoce como rama; las ramas inician en los polos de red abierta y finalizan en los ceros de red abierta. Si no hay ceros explícitos, se dice que estos se encuentran en el infinito.▲

A continuación se presentan conceptos básicos usados en el análisis y el trazo del LGR, posteriormente el procedimiento general para dibujar los lugares de las raíces y se analizan los efectos de adicionar polos y ceros al lugar, para sistemas de tiempo continuo; al final se presentará la técnica del lugar para diseñar compensadores.

Variación de polos de red cerrada

Considere la forma canónica de un sistema de control

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}$$

donde

$$GH(s) = \frac{kN(s)}{D(s)}$$

con k un parámetro que varía; así,

$$T(s) = \frac{D(s)}{D(s) + kN(s)}$$

la ecuación característica (EC) es:

$$D(s) + kN(s) = 0$$

observe que:

$$\text{si } \begin{cases} k \rightarrow 0 & \text{las raíces de EC son las raíces de } D(s) = 0 \\ k \rightarrow \infty & \text{las raíces de EC son las raíces de } N(s) = 0 \end{cases}$$

por tanto, para $k : [0, \infty)$, los polos de LC varían desde los polos de LA hacia los ceros de LC, donde terminan.

Criterios de magnitud y ángulo

Un punto s_i pertenece al LGR si:

$$D(s_i) + kN(s_i) = 0 \text{ o } GH(s_i) = -1$$

para esto, se debe cumplir:

- **CRITERIO DEL ÁNGULO:** define qué punto del plano s pertenece al LGR, para esto

$$\angle GH(s_i) = \pm 180(2L + 1), \quad L = 0, 1, 2, \dots$$

- **CRITERIO DE MAGNITUD:** da la ganancia k en el punto del LGR. Para esto se debe cumplir que

$$|GH(s_i)| = 1$$

o bien

$$|k| = \left| \frac{D(s_i)}{N(s_i)} \right|$$

El criterio del ángulo se evalúa (ver Figura 7.4) restando a la suma de los ángulos de los ceros los ángulos de los polos; estos ángulos se obtienen entre el eje real o un eje de $j\omega$ constante y el vector dirigido entre el cero o polo y el punto s_i ; esto es:

$$\angle GH(s)|_{s_i} = \gamma - \beta - \alpha$$

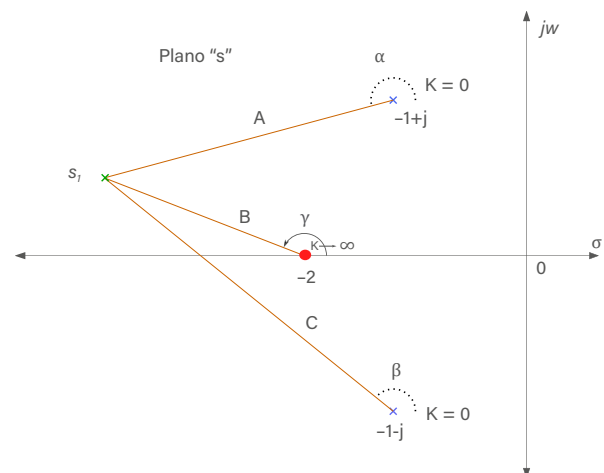


Figura 7.4: Técnica para calcular magnitud y ángulo.

Si se cumple, el punto s_i será una raíz de lazo cerrado para algún valor de k .

El criterio de magnitud es:

$$|k| = \frac{\prod \text{magnitud de los vectores desde polos de } GH \text{ a } s_i}{\prod \text{magnitud de los vectores desde ceros de } GH \text{ a } s_i}$$

$$|k|_{s=s_i} = \frac{A \cdot C}{B}$$

La construcción del lugar por esta vía sería muy compleja manualmente; el procedimiento se simplifica usando lo que se conoce como reglas de construcción del lugar geométrico de las raíces.

Reglas de construcción

1. Ordenar la EC de forma que el parámetro que se va a variar aparezca como factor; en este caso corresponde a "k",

$$1 + \frac{k \prod_{i=0}^m (s+z_i)}{\prod_{j=0}^n (s+p_j)} = 0$$

2. Las n ramas del LGR parten de los polos $-p_j$ hacia los ceros $-z_i$.
3. Hay lugar en el eje real, a la izquierda de un número impar de polos y ceros.
4. El LGR tiende a asíntotas rectas para la frecuencia compleja "s" tendiendo a ∞ que cortan el eje real en

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

y forman un ángulo con el eje real de:

$$\beta = \frac{(2l+1)180^\circ}{n-m} \quad l = 0, 1, 2, \dots, |n-m|-1$$

5. El LGR entra o sale al eje real desde el punto σ_B . El (los) valor(es) de σ_B se puede(n) obtener al resolver la ecuación algebraica resultante de la expresión:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_B + p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_B + z_i}$$

Al analizar, en general, el comportamiento de la rama en el lugar donde se desprende del eje real deben satisfacer:

$$\frac{dGH(s)}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{dk}{ds} = 0$$

luego, al resolver

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

se obtienen directamente los puntos de ruptura. Estas ecuaciones son solo una condición necesaria; adicionalmente debe satisfacer la EC para algún k real.

6. El lugar parte o llega desde polos o ceros complejos formando ángulos de:

$$\begin{aligned} \theta_p &= 180 + \angle GH'(p_c) && \text{Partida de polos complejos } p_c \\ \theta_L &= 180 - \angle GH''(z_c) && \text{Llegada a ceros complejos } z_c \end{aligned}$$

donde, $\angle GH'(p_c)$, $\angle GH''(z_c)$ son los ángulos de GH sin considerar la contribución del polo o el cero.

7. Evaluar el corte del LGR con el eje imaginario mediante el criterio de Routh.
8. Con los criterios de magnitud y ángulo, determinar el lugar con suficiente exactitud alrededor de eje $j\omega$ y el origen del plano s.

Estabilidad relativa desde el lugar geométrico de las raíces

La regla 7 se utiliza para calcular el k crítico (k_c) para inestabilidad, cuando k corresponde a la ganancia de LA; k_c permite calcular la medida de estabilidad relativa conocida como *margen de ganancia* (MG), el cual se define como el factor por el cual se puede multiplicar la ganancia actual k_o del sistema, antes de que se haga inestable. Matemáticamente, se calcula como la relación entre la ganancia crítica y la ganancia actual del sistema.

$$MG = \frac{k_c}{k_o}$$

Compensador

En SAC se definen los compensadores considerando las topologías de implementación (según su ubicación en el lazo típico) y la estructura de la función de transferencia.

Dependiendo de la ubicación en el lazo de control, se reconocen tres estructuras: los compensadores en cascada o serie, los compensadores en la realimenta-

ción (o *feedback*) y los compensadores con alimentación adelante (conocidos como *feedforward*), como se muestra en la Figura 7.5, donde $G_p(s)$ es la planta, $H(s)$ es la dinámica de realimentación, $G_A(s)$ es el actuador, $G_c(s)$ es el compensador en cascada, $G_{Fb}(s)$ es el compensador realimentado y $G_{Ffd}(s)$ es el compensador feed-forward.

La otra clasificación de los compensadores es según la estructura de la función de transferencia; el compensador (o controlador) más conocido y empleado en la industria es el PID. Una alternativa a los controladores PID son los denominados redes de adelanto-atraso (o simplemente compensadores).

Matemáticamente, un compensador es una relación entre un polinomio en el denominador y un polinomio de numerador con un número definido de polos y ceros, normalmente reales, aunque se pueden tener

también valores complejos conjugados. En sistemas automáticos de control, el compensador tiene una función de transferencia que le aporta ganancia, ceros y polos en lugares seleccionados para que el sistema en lazo cerrado cumpla con especificaciones deseadas de desempeño estático y dinámico.

Para explicación, se tomará un compensador simple con una ganancia unitaria, un polo y un cero, como se muestra en la ecuación 7.2.

$$G_c(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c} \quad (7.2)$$

donde z_c y p_c son los polos y ceros del compensador que se le adicionan al sistema para cambiar su comportamiento.

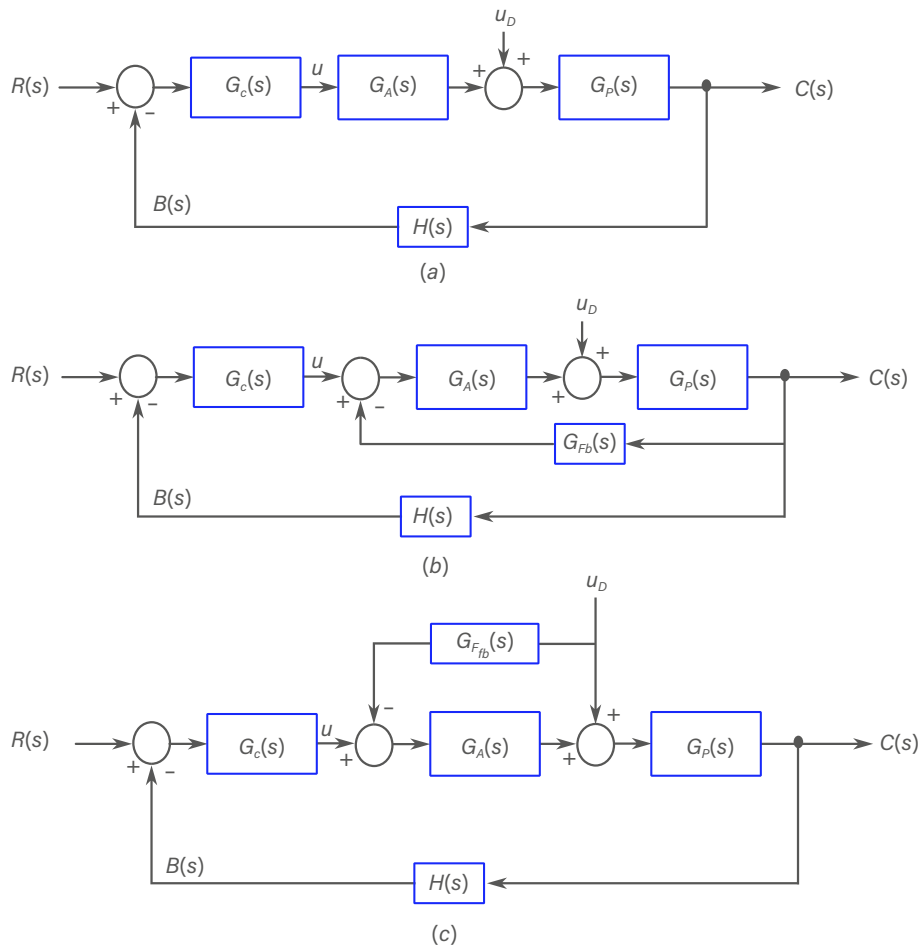


Figura 7.5: Compensadores (a) cascada, (b) *feedback*, (c) *feedforward*.

Compensadores adelanto-atraso

Dependiendo de la ubicación relativa del cero al polo se tienen compensadores en atraso de fase ("phase-lag compensators") y compensadores en adelanto de fase ("phase-lead compensators") como se ve en la Figura 7.6; su aplicación fue muy práctica y fácil con amplificadores operacionales a través de lo que se conoce como realización de filtros activos.

Los términos adelanto y atraso se refieren a la capacidad de aumentar o disminuir la fase total del sistema en función de la ubicación relativa del polo al cero, como se ve en la Figura 7.6.

Son más generales que las estructuras PID aunque los PID se pueden ajustar con las técnicas de ajuste de los compensadores adelanto-atraso de fase.

Antes de añadir un compensador al sistema, el analista deberá verificar si con solo ajustar la ganancia se cumplen los requerimientos de operación del sistema en lazo cerrado (LC).

Efectos de modificación de la ganancia y adición de polos y ceros en el LGR y la respuesta transitoria

Al igual que el controlador PID, al introducir un compensador en el lazo de un sistema de control se busca modificar las características de desempeño estáticas y dinámicas del proceso para cumplir con especificaciones deseadas de funcionamiento.

Hay dos requerimientos básicos que son: la precisión o error en estado estable y el tiempo de estabilización del sistema.

Normalmente, los sistemas dinámicos SISO (sin tiempo muerto) se pueden representar como un retardo de primer orden o como uno de segundo orden (ver ecuación 7.4), para estos dos casos particulares y suponiendo que para el cálculo del tiempo de estabilización se acepta el criterio del 2%, los tiempos de estabilización se calculan como se muestra en la ecuación 7.3.

$$\text{primer orden} \rightarrow t_s = \frac{4}{\tau_{LC}} \quad (7.3)$$

$$\text{segundo orden} \rightarrow t_s = \frac{4}{\rho W_{nLC}}$$

$$G_{LA}(s) = \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad G_{LA}(s) = \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_c)} \quad (7.4)$$

Los lugares que permiten cumplir este requerimiento se encuentran en el plano "s" a la izquierda

$$-\frac{1}{\tau_{LC}} \text{ y de } -\frac{1}{\rho W_{nLC}} \text{ para cada caso.}$$

Tomando el caso de la planta de primer orden (retardo de primer orden), como se muestra en la Figura 7.7, los lugares deseados para los polos de lazo cerrado se encuentran a la izquierda de la línea $1/\tau_{LC}$ (línea punteada vertical) y el LGR del sistema se muestra con la línea más gruesa. En la Figura 7.7a se observa que para la ubicación del polo con respecto a la línea, el sistema cumple con el requerimiento de velocidad; pero para la Figura 7.7b no cumple para valores de k menores que K_{min} por lo que la tarea del diseñador es encontrar ese valor.

En caso de tener una planta de segundo orden con polos en lazo abierto reales y distintos, con LGR que se muestra en la Figura 7.8, se puede observar que en el caso de la 7.8a el sistema cumplirá con el requerimiento de t_s , mientras que para la Figura 7.8b será necesario calcular el valor de K_{min} que cumpla con el requisito.

Para el caso de la 7.8c, el solo ajuste de la ganancia no permite cumplir con la necesidad, por lo que será necesario introducir polos o ceros que modifiquen el LGR y obliguen a las ramas a desplazarse hacia la izquierda y de esa manera cumplir con la especificación de t_s .

Para entender el procedimiento de diseño es necesario revisar el efecto de adicionar un polo y un cero al LGR. En la Figura 7.9a se representa el LGR de la planta de segundo orden con polos reales distintos. Se observa en la 7.9b cómo la adición del polo $-p_3$ a la izquierda

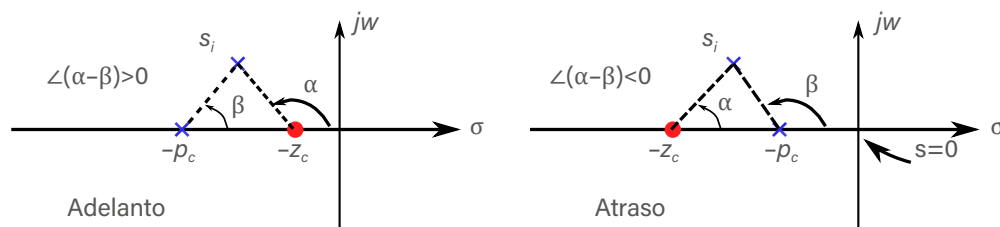


Figura 7.6: Compensadores adelanto y atraso.

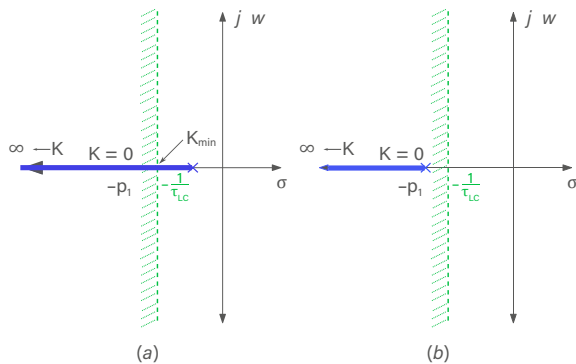


Figura 7.7: Efecto de ajuste de ganancia en planta de primer orden.

del polo $-p_2$ tira las ramas con polos complejos conjugados hacia la derecha del plano complejo "s"; para saber hacia donde "jala" las ramas, basta con calcular el ángulo de las asíntotas; originalmente el sistema (sin adición de polos) tiene dos ramas con asíntotas en

$$\pm(2l - 1) * 180^\circ / (n - m) \quad l = 0 \dots [(n - m) - 1]$$

esto corresponde para el ejemplo en $\pm 90^\circ$

Al adicionar el polo p_3 las asíntotas estarán en -180° , $\pm 60^\circ$.

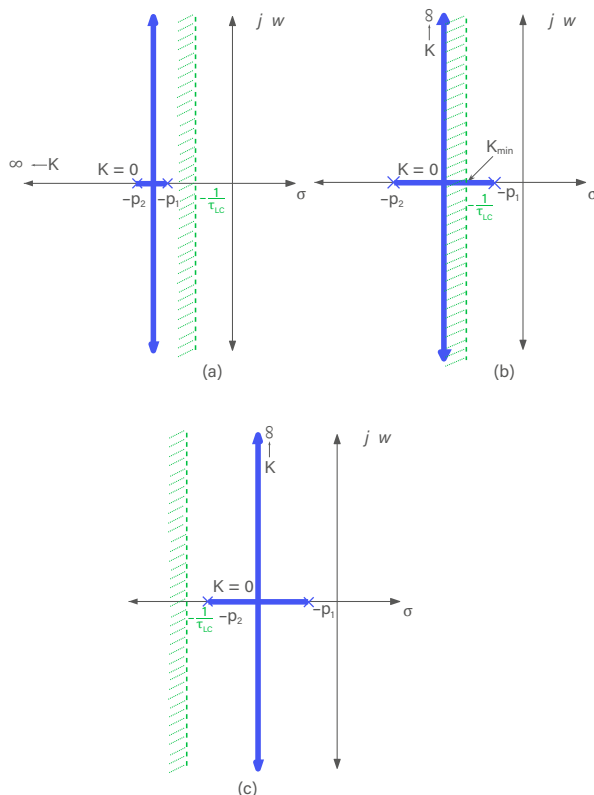


Figura 7.8: Efecto de ajuste de ganancia en planta de segundo orden.

Al adicionar un polo en $-p_4$ (Figura 7.9c) aparece otra rama para un total de 4 que van hacia asíntotas en $\pm 45^\circ$, 165° , 225° .

En el caso de adicionar polos complejos conjugados, como en la 7.9d el efecto es similar al caso c, pero ahora las ramas se desprenden desde los polos imaginarios, para lo que es necesario calcular los ángulos de partida desde los polos.

Nota 42. Adicionar polos aleja las ramas de los polos.▲

Similar a la adición de polos a una planta, adicionar ceros modifica el LGR, como se muestra en la Figura 7.10; el efecto más fuerte del cero es que atrae las ramas, como se muestra en las Figuras 7.10b y 7.10c; sin embargo, en la presencia de más polos, debe tenerse cuidado especial con el comportamiento de las asíntotas para las ramas restantes.

En casos en que existan polos y ceros muy cercanos, reales o complejos conjugados, deberá realizarse un análisis muy detallado porque la tendencia a hacer cancelación polos ceros modifica la ubicación de los polos en las ramas restantes.

La adición de polos y ceros del compensador, regularmente da lugar a sistemas en lazo cerrado subamortiguados, por lo que es usual adicionar a las especificaciones deseadas de desempeño dinámico (tiempo de estabilización) y de desempeño estático (error permanente), otras características como el margen de ganancia, sobrepaso máximo o coeficiente de amortiguamiento.

Nota 43. La adición de un cero a un sistema de segundo orden con $0 < \rho < 1$ tiene como efecto disminuir el tiempo del pico y aumentar el sobrepaso máximo. El cero es equivalente a adicionar efecto derivativo; en este caso se logra un equilibrio entre un comportamiento aceptable para la respuesta transitoria y un comportamiento aceptable para la respuesta permanente.▲

Región deseada polos

Las especificaciones deseadas de los sistemas de control normalmente se dan en el tiempo; el diseñador deberá ajustar sus compensadores para que el sistema cumpla con:

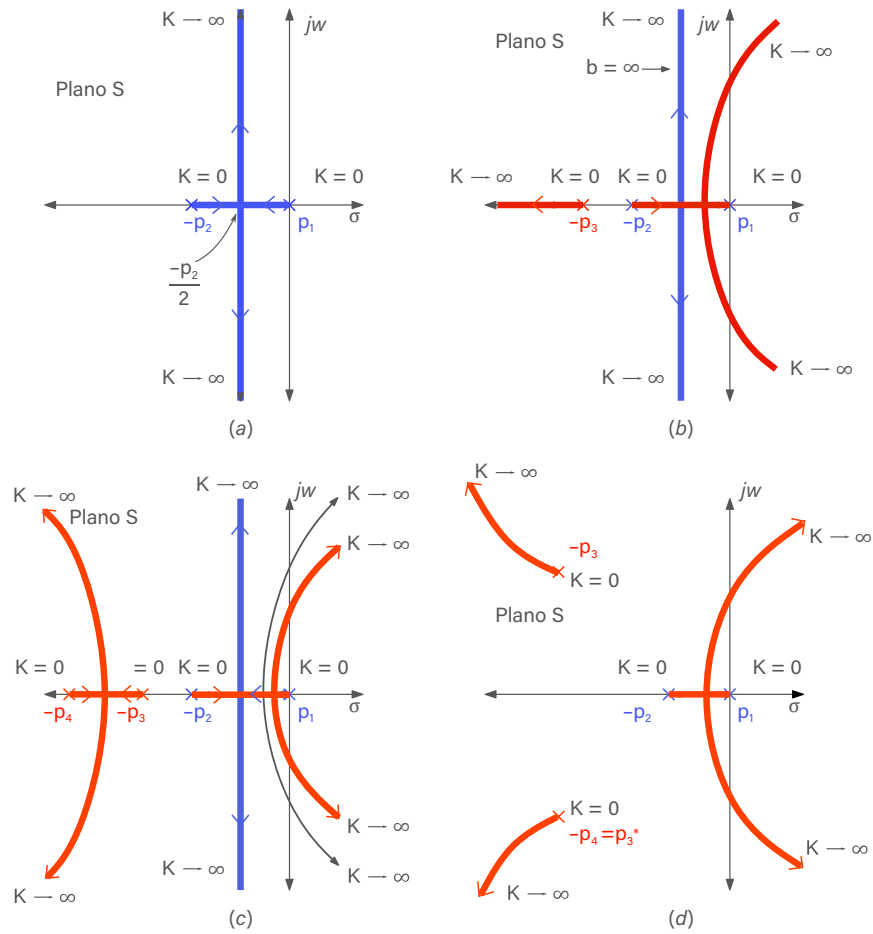


Figura 7.9: Efecto de adicionar polos a planta de segundo orden.

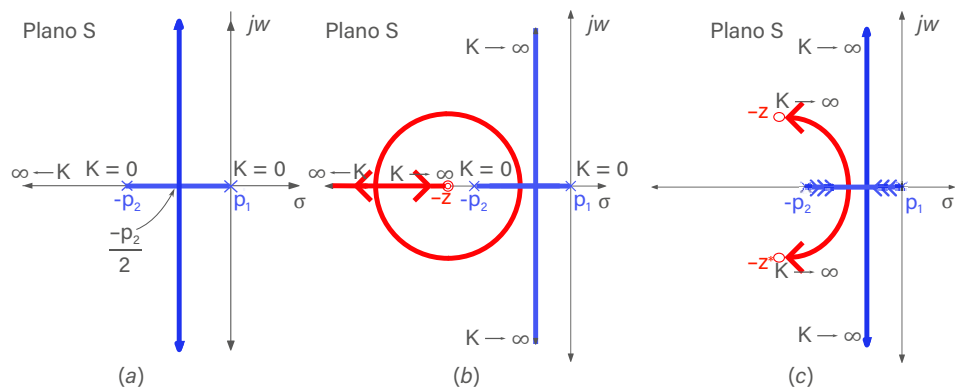


Figura 7.10: Efecto de adicionar ceros a planta de segundo orden.

1. Respuesta permanente (error de estado estacionario).
2. Sobrepaso máximo.
3. Máximo tiempo de establecimiento
4. Tiempo de levante (el menor posible).

Considerando sistemas dinámicos con comportamiento dominante de primero o de segundo orden en lazo abierto, y que en lazo se desea un comportamiento dinámico con dominancia de segundo orden, con función de transferencia deseada $G_d(s)$

$$G_d(s) = \frac{W_n^2}{s^2 + 2\rho W_n s + W_n^2} \quad (7.5)$$

con polos en

$$s_{1,2} = -\rho W_n \pm W_n \sqrt{\rho^2 - 1} \quad (7.6)$$

se puede especificar el comportamiento en red cerrada usando el plano "s" y el LGR para seleccionar el parámetro de la ganancia que permita cumplir con esas especificaciones.

A continuación se calculan los valores para la especificación adecuada en lazo cerrado, para sistemas con dinámica dominante de segundo orden.

La salida de este sistema con entrada tipo escalón unitario es

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos(w_d t) + \frac{\sigma}{W_d} \sin(w_d t) \right) \\ &= 1 - \frac{W_n}{W_d} e^{-\sigma t} \sin(w_d t + \phi) \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde

$$\phi = \sin^{-1} \sqrt{1 - \rho^2} = \cos^{-1} \rho = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho}$$

con tiempo pico, máxima salida y sobrepaso

$$t_p = \frac{\pi}{W_d} \quad c_{\max} = 1 + e^{-\pi \rho W_n / W_d}$$

$$MP = \left| \frac{c_{\max} - 1}{1} \right| = e^{-\pi \rho W_n / W_d} = e^{-\frac{\pi \rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}}$$

los cuales han sido graficados en la Figura 7.11.

Si se desea un sobrepaso bajo, se debe imponer un factor de amortiguación más alto, pero eso conduce a incrementar el tiempo de pico, lo que hace más lenta la respuesta del sistema, luego el diseñador debe lidiar con esos compromisos.

Por último, el tiempo de subida t_r se puede calcular como el tiempo que tarda la señal en alcanzar por vez primera el valor final (o de estado estable) de la señal $c(t)$, lo que equivale a hacer

$$c(t) = 1 = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos(w_d t_r) + \frac{\sigma}{W_d} \sin(w_d t_r) \right) \quad (7.8)$$

donde,

$$\cos(w_d t_r) + \frac{\sigma}{W_d} \sin(w_d t_r) = 0 \quad (7.9)$$

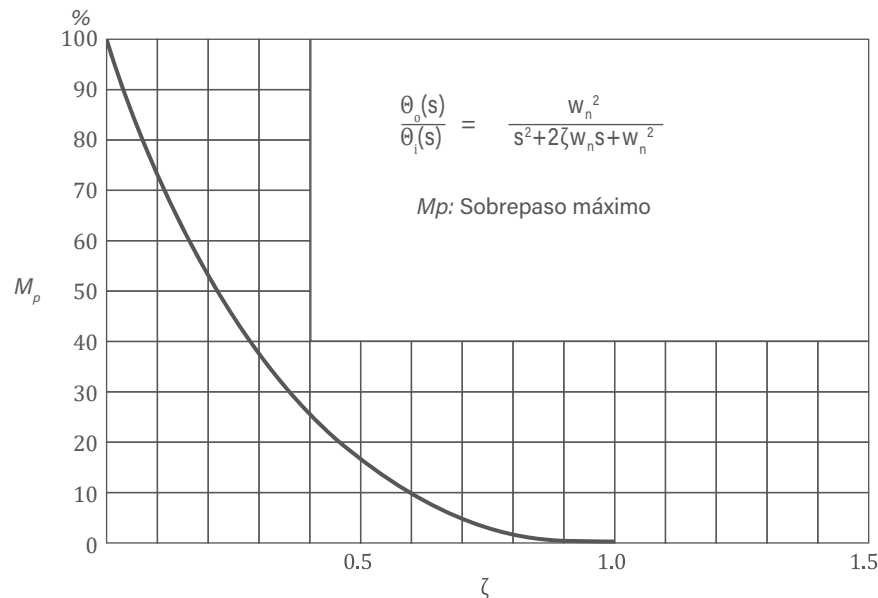


Figura 7.11: Relación entre el máximo paso y el coeficiente de amortiguamiento ρ para sistema subamortiguado de segundo orden. Fuente: Ogata (1993).

$$\tan(w_d t_r) = -\frac{w_d}{\sigma} = -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \quad (7.10)$$

por lo que

$$t_r = \frac{1}{w_d} \tan^{-1}\left(-\frac{w_d}{\sigma}\right) = -\frac{\pi - \phi}{w_d} \quad (7.11)$$

Se observa que para un valor pequeño de t_r el valor de w_d debe ser grande. Estos análisis permiten establecer en el plano "s" regiones deseadas para los polos de red cerrada, así:

- Para la especificación de tiempo de establecimiento con $t_s < T_{sd}$ asumiendo que se desea una precisión en régimen permanente menor al 2 %, se calcula σ ,

$$\sigma > \frac{4}{T_{sd}}$$

eso permite dibujar una región en el plano "s" a la izquierda de la línea trazada por $-\sigma$.

- Para la especificación deseada de sobrepaso máximo, debido a la correlación con el coeficiente de amortiguamiento, se obtiene en el límite un ρ mínimo para cumplir la especificación, y como

$$\phi = \cos^{-1}\rho$$

la especificación se traslada a un rango de coeficientes de amortiguamiento entre 1 y ρ_{\min} y esta a su vez se traslada a una región trazada entre la línea con ángulo $-\phi$ y $+\phi$.

- Finalmente, si se introduce una especificación para el tiempo de levantamiento, según la ecuación 7.11 y tomando el valor máximo para el MP, se encuentra un valor deseado para w_d con el cual se traza un semicírculo; observe que valores mayores de w_d implican valores más pequeños de t_r .

De esa manera se tiene completamente dibujada la región deseada para los polos de lazo cerrado, como se observa en la Figura 7.12, donde las líneas continuas y las flechas indican la región deseada para ubicar los polos de lazo cerrado que cumplen las especificaciones deseadas de funcionamiento.

Diseño de compensadores por el método del lugar geométrico de las raíces

El método se resume en:

1. Ubicar la región deseada para los polos de red cerrada, en el plano "s".
2. Si el sistema es inestable, intentar estabilizarlo ajustando la ganancia del sistema.
3. Revisar las especificaciones de desempeño estático y ver si se cumplen solo ajustando ganancia, de lo contrario revisar si es necesario adicionar integración a su sistema para cumplir el requerimiento.
4. Trazar el LGR a partir de la ubicación de los polos y ceros de la función de transferencia de lazo abierto.
5. Intentar cumplir con las especificaciones de funcionamiento, ajustando únicamente ganancia; si no es suficiente.
6. Intentar cumplir los requerimientos adicionando polos o ceros del compensador para obligar a que su LGR se ubique en la región deseada de los polos.
7. Escoger la mejor ubicación para los polos de lazo cerrado y reajustar la ganancia, si es necesario. Tenga cuidado de no exigir demasiado al actuador para evitar zonas de saturación y gastos energéticos indeseados.

Como se vio en la Figura 7.6, la ubicación más cercana de los polos de lazo cerrado se puede lograr adicionando redes de adelanto, atraso de fase o las dos, combinadas. Si se tiene un sistema de primer orden, seguramente ajustando solo ganancia es posible cumplir con las especificaciones de desempeño dinámico; sin embargo, el requerimiento de error permanente de posición no se puede alcanzar porque el sistema es tipo cero. La solución será adicionar una integración, con lo que se genera un LGR, como se muestra en la Figura 7.10a. Si σ_{\min} se encuentra a la izquierda de $-p_2/2$, no será posible ubicar los polos deseados con solo ajustar la ganancia; la solución es adicionar un cero, como se muestra en la Figura 7.10b; este compensador es equivalente a adicionar una acción derivativa.

Resumiendo hasta aquí, para una planta de primer orden se debió adicionar un polo en el origen y un cero real, lo que equivale a imponer una dinámica de un

controlador PI en el lazo directo; para implementación con amplificadores operacionales, este controlador no es realizable (por causalidad) por lo que la solución consiste en introducir un filtro derivativo con función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{s + T_D}{s + T_D/N}$$

Una función alternativa y más general es la red de adelanto, como la que se muestra en la Figura 7.6, donde:

$$G_c(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}$$

El procedimiento consiste en ubicar el cero y el polo de forma que se obligue a que las ramas del LGR

pasen por los polos deseados de red cerrada. A continuación se revisa el procedimiento de selección de ubicación para el cero y el polo de la red de adelanto y de la red de atraso.

Compensador en adelanto

Como puede observarse en la Figura 7.6, este compensador, al adicionar un cero a la derecha del polo en el semiplano izquierdo –en configuración cascada con la función de transferencia de lazo directo–, contribuye aumentando fase al sistema y mejorando la estabilidad relativa. La función de transferencia del lazo directo de la planta está dada por:

$$L(s) = G_c(s)G_p(s)$$

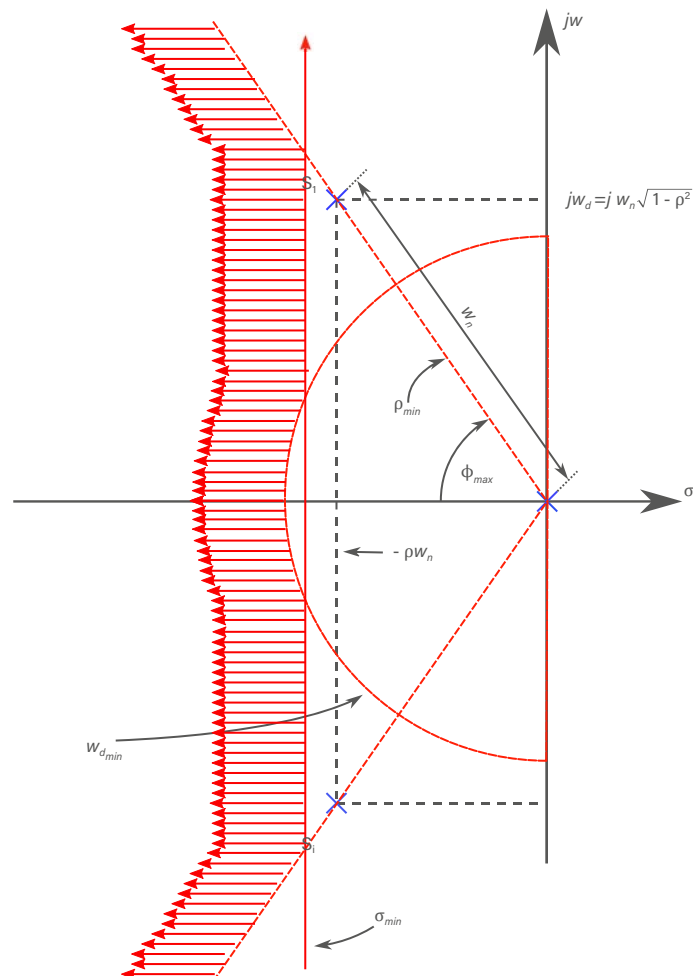


Figura 7.12: Ubicación deseada de polos de lazo cerrado.

Al desear que el LGR pase por un polo en s_1 , seleccionado para que el sistema en red cerrada cumpla con las especificaciones de desempeño dinámico en lazo cerrado, la dinámica de $G_c(s)$ en $L(s)$ deberá cumplir en s_1 los criterios de magnitud y ángulo, tal que

$$E.C.: 1 + L(s_1) = 0$$

El procedimiento para la ubicación del polo y del cero se describe a continuación:

1. Determine la región deseada para los polos de red cerrada (partiendo de las especificaciones deseadas de desempeño dinámico).
2. Verifique con el LGR si con solo el ajuste de la ganancia cumple los desempeños dinámicos.

Si los cumple, realice el ajuste y termine; de lo contrario, continúe.

3. Seleccione en el plano "s" un polo de red cerrada (s_1) para que al pasar el LGR por ese polo se cumplan las especificaciones de desempeño dinámico.
4. Calcule en s_1 el ángulo ϕ que debe adicionar $G_c(s)$ (el compensador debe contribuir con ese ángulo). En la Figura 7.6 se observa que el compensador aporta en s_1 un ángulo $\alpha - \beta$, por lo que el trabajo de diseño consiste en ubicar el polo y el cero tal que

$$\phi = \alpha - \beta$$

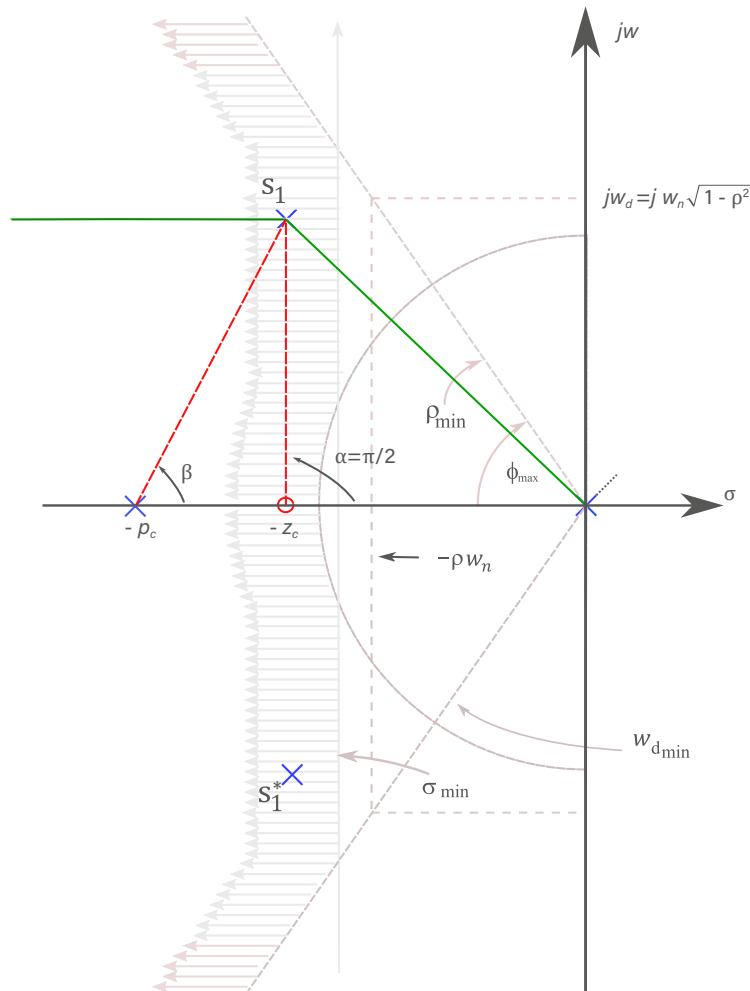


Figura 7.13: Ubicación del cero en la parte real del polo deseado.

5. Para la ubicación exacta del cero y del polo que aporten el ángulo ϕ existen muchas opciones; sin embargo, se recomiendan dos:

5.1 Ubique el cero en la parte real del polo deseado (ver Figura 7.13); esto es, si $s_i = \sigma_i \pm j\omega_d$ ubique $z_c = \sigma_i$ y calcule la ubicación del polo tal que $\angle p_i = \pi - \phi$.

5.2. Trace una línea paralela al eje $j = 0$ que toque el polo en s_i y desde s_i hasta el origen trace otra recta, como se ilustra en la Figura 7.14. Se observa que el cero y el polo deben aportar cada uno $\phi/2$, para obtener el avance de fase deseado de ϕ , de mane-

ra que el diseñador usará esta información para la adecuada ubicación del cero y del polo.

Nota 45. Se recomienda al diseñador agregar una cantidad pequeña adicional a la fase de avance deseada para compensar pequeños errores de cálculo.▲

Nota 46. Si con un solo compensador no se logra el avance de fase necesario, se podrán usar dos redes de adelanto en cascada.▲

Nota 47. Observe que la red de adelanto aporta en mejorar las características dinámicas del sistema, pero no las características estáticas.▲

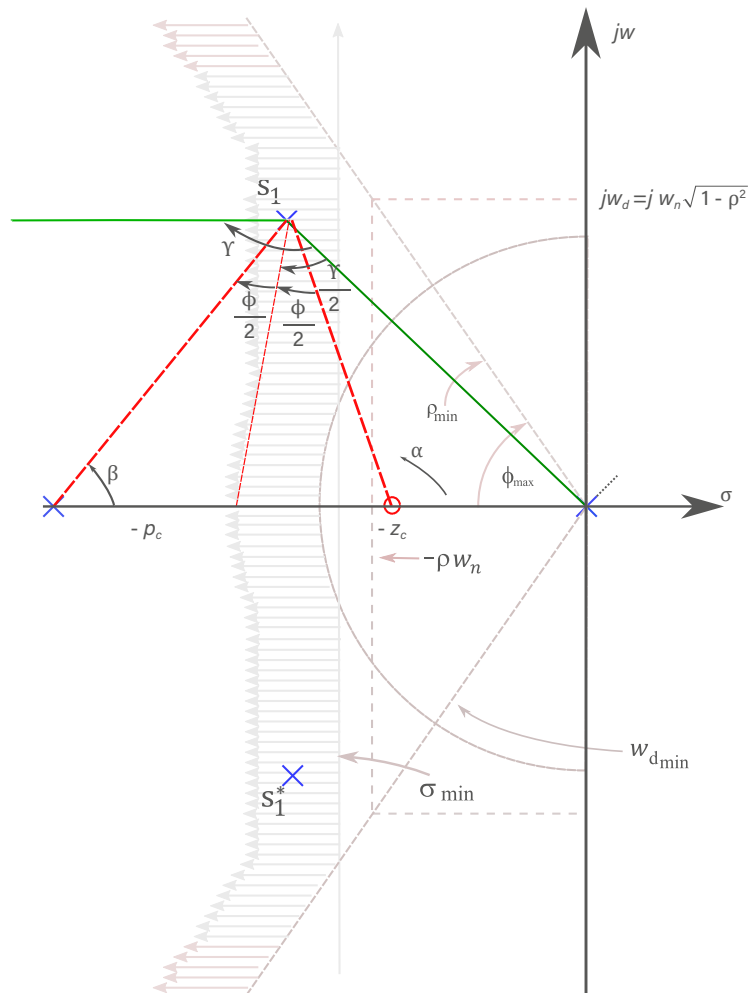


Figura 7.14: Técnica de bisección del aporte en fase para ubicación de polos y ceros.

Compensador en atraso

El compensador en atraso es útil cuando el sistema presenta un comportamiento adecuado de la respuesta dinámica, pero que requiere mejorar las características en estado permanente. Esto significa que será necesario procurar no modificar sustancialmente el LGR, así que el compensador en atraso será empleado para ajustar la ganancia de lazo cerrado modificando la ganancia de lazo abierto; esto se logra permitiendo variación del ángulo ϕ en unos pocos grados, para lo que el polo y el cero del compensador se ubican uno muy cerca del otro, en inmediaciones del origen ($s = 0 \pm 0$).

Considerando que el compensador en adelante es de la forma

$$C_c(s) = k_c \frac{s + z_c}{s + p_c}$$

al estar muy cerca el cero del polo, la ganancia que aportará la red de atraso será:

$$|C_c(s)| = \left| k_c \frac{s + z_c}{s + p_c} \right| \approx k_c$$

El aumento de la ganancia implica un aumento en las constantes de error estático; por ejemplo, para la constante de error estático de velocidad del sistema sin compensar es

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s)$$

si se adiciona el compensador en atraso de fase, la nueva constante de error de velocidad es

$$\begin{aligned} K'_v &= \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) sG_p(s) \\ &= k_c \frac{z_c}{p_c} K_v \end{aligned} \quad (5.14)$$

La constante de error se incrementa en

$$k_c \frac{z_c}{p_c}$$

Al hacer

$$\frac{z_c}{p_c} \approx 1$$

el incremento en la constante de error depende de k_c .

En resumen, para ajustar la red de atraso por el LGR:

1. Dibuje el LGR y ubique en el lugar deseado para los polos de LC.
2. Calcule la constante de error según las especificaciones dadas.
3. Determine el valor que se va a incrementar en la ganancia de LA que permita satisfacer los requerimientos de estado permanente.
4. Determine la ubicación del polo y el cero que cumplen con el requerimiento.
5. Dibuje el nuevo LGR y sobre él ubique los polos deseados de lazo cerrado.
6. Recalcule el valor de la ganancia a fin de que se cumplan los criterios de error permanente y los polos de lazo cerrado estén en la ubicación deseada.

Compensador adelante-atraso de fase

Debido a que la compensación en adelante mejora la velocidad de respuesta y la estabilidad del sistema, pero no mejora la respuesta permanente, y que, por el contrario, el compensador en atraso mejora la respuesta permanente, pero reduce la velocidad de respuesta, es útil combinar los dos para mejorar tanto desempeño dinámico como estático en el sistema.

Para el procedimiento de diseño se sugiere primero ajustar el compensador en adelante para cumplir las especificaciones deseadas de régimen dinámico, y posteriormente ajustar el compensador para cumplir las especificaciones deseadas para régimen estático; finalmente, es común realizar ajustes finos a la ubicación de los polos; eso solo se logra después de adquirir habilidad y experiencia a través de muchos ejercicios.

Materiales y equipos

En la Tabla 7.1 se listan los elementos necesarios para adelantar la experimentación.

Procedimiento

El profesor le asignará una planta para el experimento; se asume que usted no conoce la planta, aunque es muy recomendable tener al menos una idea de las dinámicas que se están manejando.

Trazo del lugar geométrico de las raíces

Se recomienda tener en cuenta el siguiente procedimiento:

1. Varíe la señal de entrada para obtener la característica estática e identificar saturación, tiempo muerto y región lineal.
2. Determine la entrada que le permite poner a trabajar su sistema en el punto de operación para la región lineal seleccionada, observe que ese valor corresponde al V_{bias} de su controlador PID-ISA. Ajuste la entrada a la planta en ese valor.
3. Cierre el lazo y varíe la ganancia K para la cual el sistema empieza a oscilar de manera sostenidas: (esta será la máxima ganancia que le aplicará al sistema) y registre la frecuencia de oscilación del sistema: _____ [Hz] o _____ [rad/seg]. En este punto, encuentre el valor más grande de la ganancia K para el cual el sistema no presenta oscilaciones (esta será la ganancia mínima que se le aplicará al sistema). Calcule el margen de ganancia y reporte.
4. Varíe el valor de K entre estos dos valores; aplique un escalón al sistema y registre los datos relevantes que le permitan conocer, para esa ganancia, los polos del sistema en red cerrada que están generando la respuesta dinámica que usted observa para el sistema en red cerrada con la ganancia introducida.
5. Repita el paso 4 variando ganancias desde un mínimo $k_{\text{min}} = 0$ hasta el K del punto 3. En este momento, usted debe tener un conjunto de polos para cada valor de k .
6. Con los datos anteriores, trace el lugar geométrico de las raíces del sistema.

Nota 48. Si para su sistema real, por razones de seguridad o de integralidad de la planta, no es posible llevarla al límite de estabilidad, usted puede trabajar con el máximo valor permisible o a partir del modelo montar una simulación y calcular el K .▲

Sintonía de redes de adelanto-atraso de fase

Reporte a su profesor de laboratorio el modelo de su planta, y el lugar geométrico de las raíces obtenido en el punto 6. A partir del desempeño dinámico y estático de su planta en lazo abierto, el profesor le dará requerimientos de desempeño dinámico y estático para su planta en lazo cerrado.

Tabla 7.1: Materiales y equipos.

| Hardware | | | |
|----------|----------------|-----------------|---|
| Cantidad | Nombre | Marca / Modelo | Especificaciones |
| 1 | PC | Intel / AMD | Procesador: para trabajar con MATLAB® local: Intel I5 o Ryzen 5, para MATLAB® online: Intel I3 o Ryzen 3. Memoria RAM: 8 GB. Espacio en disco duro: 20 GB. |
| 1 | Servomecanismo | Feedback® MS150 | Motor DC con tacómetro analógico, para prácticas de control de servo- mecanismos. |
| Software | | | |
| 1 | Software | MATLAB® | Versión 2020b. |
| 1 | Software | LabVIEW® | Versión 2020b o superior. |

7. Dibuje en el plano “s” la región para los polos deseados de lazo cerrado.
8. Analíticamente, ubique los lugares para su compensador adelanto-atraso de fase que le permite cumplir las especificaciones deseadas de funcionamiento.
9. Implemente el controlador diseñado y realice el experimento para verificar si se alcanzan los desempeños especificados.
10. Si no se cumplen las especificaciones, realice los ajustes necesarios para cumplir los requerimientos; justifique su procedimiento y selección.

Informe

Elabore su reporte donde, de forma estructurada, organizada y profesional, informe los datos obtenidos en cada punto del procedimiento, su análisis de resultados y las conclusiones.