Capítulo 5

CARACTERÍSTICAS DE REALIMENTACIÓN EN SAC

https://doi.org/10.25100/peu.1416.cap5

En este capítulo se estudian las características de los sistemas dinámicos en lazo abierto y en lazo cerrado, las cuales son útiles para comprender el funcionamiento de los sistemas y para posteriormente modificar su desempeño a través del diseño de los controladores.

Objetivos y resultados de aprendizaje

Objetivo general

Presentar las características de los sistemas realimentados.

Objetivos específicos

- Establecer las características de los sistemas realimentados, versus los sistemas de lazo abierto mediante técnicas experimentales.
- Establecer estabilidad, ganancia del lazo, sensibilidad, relación señal-ruido y error permanente.

Resultados de aprendizaje

Al finalizar, el estudiante:

- Reconoce las diferencias entre un sistema en lazo abierto y un sistema en lazo cerrado para estudiar las características de desempeño de SAC.
- Conoce el efecto de cerrar el lazo para analizar el comportamiento de la ganancia del sistema, la velocidad de respuesta y la estabilidad.
- Reconoce el efecto que tiene un cero de la función de transferencia de lazo abierto sobre la función de transferencia de lazo cerrado para analizar modificaciones en los desempeños estáticos y dinámicos de SAC.
- Maneja los conceptos de sensibilidad del sistema para distinguir los efectos de la sensibilidad en lazo abierto y en lazo cerrado.

Marco teórico

La función de la realimentación y del controlador en un SAC es modificar las características de desempeño del sistema al cerrar el lazo, y de esa manera cumplir con las especificaciones deseadas de funcionamiento

Sistema en red abierta y en red cerrada

En la Figura 5.1 se muestran las representaciones de un sistema en lazo abierto versus uno en lazo cerrado.

Kc representa la ganancia o función de transferencia entre la señal de control $U(s)$ ($u(t)$) y la entrada $R(s)$ ($r(t)$); $G(s)$ representa la función de transferencia entre $C(s)$ y $U(s)$; y $H(s)$ representa la función de transferencia entre la señal de realimentación $B(s)$ y la señal medida $C(s)$.

Tomando como referencia estas dos representaciones de sistemas de control, a continuación se estudian los efectos de estas topologías en las características de funcionamiento: ganancia, respuesta temporal, sensibilidad y estabilidad (Franklin et al., 1991); además, se estudia el efecto de las perturbaciones en el sistema (Van de Vegte, 1994).

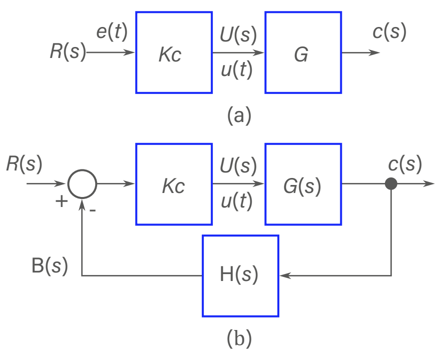


Figura 5.1: Representación (a) lazo abierto y (b) lazo cerrado.

Ganancia

En el lazo abierto la ganancia del sistema es dada por la relación

$$\frac{C(s)}{R(s)} = K_c G(s) \tag{5.1}$$

en lazo cerrado la ganancia es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_c G(s)}{1+K_c G(s)H(S)} \tag{5.2}$$

En lazo abierto, cualquier cambio en K_c o en G provoca cambios proporcionales en la salida $c(t)$.

En lazo cerrado, variaciones en K_c o en G provocan cambios más pequeños en $c(t)$, siempre que la magnitud del producto $|K_c G(s)H(S)|$ sea mucho mayor que 1 ($\gg 1$).

Por lo tanto, la realimentación trae como efecto una reducción en la ganancia del sistema con respecto al lazo abierto.

Efecto en la respuesta temporal

Respuesta transitoria

Asumiendo un sistema con función de transferencia de primer orden de la forma

$$G(s) = \frac{1}{\tau s+1}$$

y $H(s) = 1$, el valor de τ define la velocidad de la respuesta transitoria del sistema; valores grandes de τ implican polos

$$\left(s = -\frac{1}{\tau}\right)$$

cerca al eje imaginario en el plano "s" (cerca al $s = 0$) y respuestas lentas (Kuo, 1996).

Cuando se cierra el lazo, al remplazar

$$G(s) = \frac{1}{\tau s+1}$$

la nueva función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{\frac{K_c}{1+K_c}}{\frac{\tau}{1+K_c}s+1} = \frac{K_{LC}}{\tau_{LC}s+1}$$

Se puede observar cómo la constante de tiempo en red cerrada τ_{LC} se ve atenuada por el factor $1 + K_c$; entre más grande sea el valor de K_c, más pequeño será el valor de τ_{LC} y más rápida será la respuesta del sistema.

Nota 26. Como el polo está ubicado en $s = -1/\tau_{LC}$, valores más pequeños de τ_{LC} dan lugar a polos más alejados (hacia $-\infty$).▲

Nota 27. Para valores grandes de K_c, la ganancia en lazo cerrado, K_{LC}, tiende a 1.▲

Para sistemas con dinámicas dominantes de segundo orden, en el plano "s" los polos se ubican como se ilustra en la Figura 5.2.

De acuerdo con la ubicación de estos polos (o con el factor de amortiguamiento ξ), el sistema puede tener comportamiento con o sin oscilaciones.

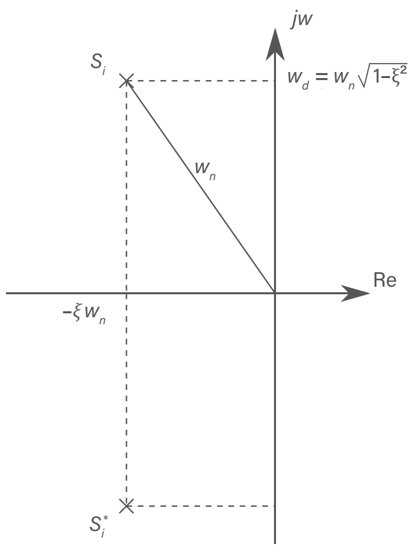


Figura 5.2: Polos complejos conjugados para sistemas de segundo orden. s_i^* es el complejo conjugado de s_i.

En todos los casos, la velocidad de la respuesta está dominada por la parte real de las raíces; esto es, por el factor $\sigma = \xi w_n$. Así, para un sistema con $0 < \xi < 0.7$, el tiempo de establecimiento equivalente se calcula como:

$$t_s = \begin{cases} \dfrac{3}{\xi w_n} \longrightarrow \text{criterio del 5 \%} \\ \dfrac{4}{\xi w_n} \longrightarrow \text{criterio del 2 \%} \end{cases} \qquad (5.4)$$

donde los valores de 5 % y de 2 % indican la banda de tolerancia aceptada cuando la señal ingresa a ella, y se usa para calcular el tiempo de estabilización o de establecimiento t_s.

Respuesta permanente

Uno de los objetivos fuertes del control es garantizar una excelente respuesta permanente o de estado estacionario; para medir la característica de la respuesta permanente el indicador más útil es a través de la señal de error $e(t)$, donde:

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

Si $H(s) = 1$,

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

En lazo abierto (Figura 5.1a):

$$C(s) = K_cG(s)R(s)$$
$$E(s) = R(s) - K_cG(s)R(s) = [1 - K_cG(s)]R(s)$$

Si se aplica una señal de entrada escalón unitario al lazo abierto, la salida en régimen permanente será:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s[1 - K_cG(s)](1/s)$$
$$= 1 - K_cG(0)$$

En lazo cerrado

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - B(s) \\ &= R(s) - H(s)C(s) \\ &= R(S) - H(s)K_cG(s)E(s) \\ &= R(S) - K_cG(s)H(s)E(s) \end{aligned}$$

Manipulando las expresiones,

$$E(s)(1 + K_cG(s)H(s)) = R(s)$$

finalmente, despejando

$$E(s) = \frac{1}{1+K_cG(s)H(S)} R(s)$$

El error en estado estacionario o de estado estable,

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K_cG(s)H(S)} sR(s) \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Resumiendo, si $R(s) = 1/s$, en estado estable

$$e_{ss} = \begin{cases} 1-K_cG(0) & \text{lazo abierto; nulo si } G(0) = 1 \\ \frac{1}{1+K_cG(0)H(0)} & \text{lazo cerrado; nulo si } G(0)H(0) \to \infty \end{cases}$$

Definición de las constantes de error

Para efecto de análisis y comprensión, considere realimentación unitaria $H(s) = 1$ y $K_c = 1$, por lo cual en lazo cerrado,

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim \frac{1}{1+G(s)} sR(s) \qquad (5.6)$$

Sea la función de transferencia de la planta representada por

$$G(s) = \frac{K}{s^n} \frac{a_ks^k + \cdots + a_1s + 1}{b_ls^l + \cdots + a_1s + 1} \qquad (5.7)$$

Donde n: **número tipo** representa la cantidad de integraciones puras en $G(s)$.

La ganancia K del sistema se puede representar como

$$K = \lim_{s\to 0} s^nG(s)$$

A partir de las ecuaciones 5.6 y 5.7, para cuando $n = 0$ y $R(s) = 1/s$:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \text{lím}_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)} sR(s) \\ &= \text{lím}_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{K}{s^0}\frac{a_k s^k + \cdots + a_1 s + 1}{b_1 s^1 + \cdots + a_1 s + 1}} \left(s\frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{1}{1+K_p} \end{aligned}$$

con

$$K_p = \text{lím}_{s\to 0} G(s) = \text{lím}_{s\to 0} \frac{K}{s^0}\frac{a_k s^k + \cdots + a_1 s + 1}{b_1 s^1 + \cdots + a_1 s + 1}$$

donde K_p: **constante de error de posición** indica el valor de la ganancia K para $n = 0$.

Cuando $n = 1$ y $R(s) = 1/s^2$.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \text{lím}_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{K}{s^1}\frac{a_k s^k + \cdots + a_1 s + 1}{b_1 s^1 + \cdots + a_1 s + 1}} \left(s\frac{1}{s^2}\right) \\ e_{ss} &= \text{lím}_{s\to 0} \frac{1}{s + s\frac{K}{s^1}\frac{a_k s^k + \cdots + a_1 s + 1}{b_1 s^1 + \cdots + a_1 s + 1}} \\ &= \frac{1}{K_v} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} K_v &= \text{lím}_{s\to 0} sG(s) = \text{lím}_{s\to 0} s\frac{K}{s} \\ &= \frac{a_k s^k + \cdots + a_1 s + 1}{b_1 s^1 + \cdots + a_1 s + 1} \end{aligned}$$

se conoce como la **constante de error de velocidad**; indica el valor de la ganancia K para $n = 1$.

Cuando $n = 2$ y $r(s) = 1/s^3$. (entrada aceleración $r(t) = t^2/2$):

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \text{lím}_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{K}{s^2}\frac{a_k s^k + \cdots + a_1 s + 1}{b_1 s^1 + \cdots + a_1 s + 1}} \left(s\frac{1}{s^3}\right) \\ &= \text{lím}_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2\frac{K}{s^2}\frac{a_k s^k + \cdots + a_1 s + 1}{b_1 s^1 + \cdots + a_1 s + 1}} \\ &= \frac{1}{K_a} \end{aligned}$$

con

$$K_a = \text{lím}_{s\to 0} s^2 G(s) = \text{lím}_{s\to 0} s^2 \frac{K}{s^2}\frac{a_k s^k + \cdots + a_1 s + 1}{b_1 s^1 + \cdots + a_1 s + 1}$$

se conoce como la **constante de error de aceleración**; indica el valor de la ganancia K para $n = 2$.

En la Tabla 5.1 se resume el listado de errores de estado estacionario para diferentes entradas y números tipo.

Tabla 5.1: Error permanente.

Entrada / Tipo	n = 0	n = 1	n = 2
$r = 1/s$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
$r = 1/s^2$	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
$r = 1/s^3$	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$

Tiempo muerto

Representa un período en el que no hay respuesta observable; es el tiempo que tarda el sistema en exhibir una respuesta en la salida después de que ha sido aplicada señal a la entrada del sistema, donde:

$$F(s) = e^{-st_d}$$

El tiempo muerto trae dificultades para el control y si es demasiado grande puede llevar a inestabilidad del sistema.

Un ejemplo de aplicación es el modelo de sistemas de primer orden con tiempo muerto

$$F(s) = \frac{K}{1+\tau s} e^{-st_d}$$

Retardo de transporte

El retardo de transporte se refiere al tiempo necesario para que la señal se propague a través del sistema. Se puede modelar usando aproximaciones de Padé (Umez-Eronini, 2001). En control es muy común usar una serie de Padé de primer orden de la forma

$$F(s) = \frac{2 - t_d s}{2 + t_d s}$$

Nota 28. Cuando el retardo de transporte o el tiempo muerto son pequeños, se suelen tratar como igual; sin embargo, como se explicó, no son lo mismo.▲

Nota 29. En sistemas discretos los tiempos muertos se pueden representar como retardos puros en la variable z; esto es, de la forma z^{-i} donde i representa el número de retardos.▲

Sensibilidad

La sensibilidad es la facultad de sentir que tenemos los seres vivos; sin embargo, esta propiedad o característica se extiende a objetos eléctricos o mecánicos en los que se puede realizar un análisis de sensibilidad, el cual consiste en la estimación de la medida en que la modificación de una variable afecta a un resultado.

Matemáticamente, se describe como

$$S_k^T = \frac{\text{Cambio porcentual en la fdt del sistema } T(s)}{\text{Cambio porcentual en el parámetro } k}$$

$$S_k^T = \frac{\Delta T/T}{\Delta k/k} = \frac{\Delta T}{\Delta k}\left[\frac{k}{T}\right]$$

Ante cambios pequeños, se puede representar como:

$$\lim_{\Delta\to 0} \Longrightarrow S_k^T = \frac{d}{dk}\left[\frac{k}{T}\right] \qquad (5.8)$$

Para efectos prácticos en sistemas de control, son deseables sensibilidades muy bajas; es decir, que modificaciones en alguna(s) variable(s) del sistema, no produzca(n) cambios significativos en las señales de interés. En caso de tener sensibilidades muy pequeñas, se dice que el *sistema es robusto*.

$$|s_k^T| \leq 1 \Longrightarrow \begin{cases} S_k^T \to 0 & \text{El sistema es robusto} \\ S_k^T \to 1 & \text{El sistema es muy sensible} \end{cases} \qquad (5.9)$$

Considerando el sistema de la Figura 5.1 con

$$H(s) = 1 \quad \text{y} \quad K_c = 1$$

y sea

$$G(s) = kN(s)/D(s)$$

una función estrictamente propia; en *red abierta*, la función de transferencia $T(s) = C(s)/R(s)$ es $G(s)$ o $T(s) = G(s)$, por lo que

$$S_G^T = \frac{G}{T}\frac{\partial T}{\partial G} = \frac{G}{G} \qquad (5.10)$$

Nota 30. Se observa que $S_G^T = S_k^T = S_k^G = 1$.▲

Nota 31. Se observa que en lazo abierto, el comportamiento de la ganancia (k) de G cambia el comportamiento del sistema en la misma proporción. ▲

Ahora se analiza la *sensibilidad en lazo cerrado*, si se considera un cambio en la trayectoria directa (G).

Es posible disminuir la sensibilidad haciendo que $GH(s)$ incremente en los rangos de frecuencia de interés. Así, si $|G(s)|$ aumenta, S_G^T tiende a cero.

$$\begin{aligned} S_G^T &= \frac{G}{T}\frac{\partial T}{\partial G} \\ &= \frac{G(1+GH)}{G}\left[\frac{a+GH-GH}{(1+GH)^2}\right] \\ &= \frac{1}{1+GH(s)} \end{aligned} \qquad (5.11)$$

Para cambios en la trayectoria de realimentación $H(s)$,

$$\begin{aligned} S_G^T &= \frac{G}{T}\frac{\partial T}{\partial G} \\ &= \frac{G(1+GH)}{G}\left[\frac{a+GH-GH}{(1+GH)^2}\right] \\ &= \frac{1}{1+GH(s)} \end{aligned} \qquad (5.11)$$

Para altos valores de $GH(s)$ la sensibilidad tiende a uno, por lo que se requiere que $|GH(s)| \ll 1$ para tener bajos valores de sensibilidad, lo cual implica tener medidas insensibles y precisas.

En caso de tener funciones de transferencias con parámetros no explícitos en la expresión, es deseable escribir la función de transferencia de lazo cerrado en la forma

$$T = \frac{A_1+kA_2}{A_3+kA_4}$$

donde los A_i son polinomios en s,

$$S_k^T = k\,\frac{A_2A_3 - A_1A_4}{(A_3+kA_4)(A_1+kA_2)} \qquad (5.13)$$

Las perturbaciones en un sistema son de diferente naturaleza y origen, las más importantes se deben a variaciones en la carga, ruido en la amplificación, ruido en la medición y distorsión por alinealidades. En la Figura 5.3 se representan algunas de ellas.

Si se consideran las señales de perturbación externas: disturbio de entrada $d_i(t)$, disturbio de salida $d_c(t)$ y ruido en la medida $n(t)$ en el lazo de control, se encuentra que existen otras representaciones para *funciones de sensibilidad.*

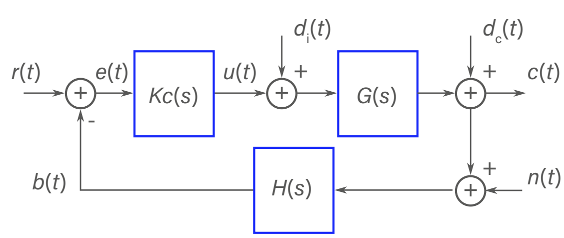


Figura 5.3: Lazo típico con señales de perturbación.

Sean $c(t)$ y $u(t)$ las salidas de interés y $r(t)$, $d_c(t)$, $d_i(t)$ y $n(t)$ las entradas, se reconocen ocho funciones de transferencia.

Considerando $H(s) = 1$, las salidas están dadas por las ecuaciones

$$c(s) = \frac{1}{1+K_cG}(K_c(s)G(s)r + d_c - K_c(s)G(s)n + G(s)d_i) \qquad (5.14)$$

$$u(s) = \frac{1}{1+K_cG}(K_c(s)r - K_c(s)d_c - K_c(s)n - K_c G(s)d_i) \qquad (5.15)$$

donde se reconocen

$$S(s) = \frac{1}{1+K_c(s)G(s)} \rightarrow \text{Función sensitividad} \qquad (5.16)$$

y

$$T(s) = \frac{K_c(s)G(s)}{1+K_c(s)G(s)} \rightarrow \text{Función sensitividad complementaria} \qquad (5.17)$$

Relación señal ruido

La relación señal ruido en un sistema se define como la función que muestra la relación de ganancias entre la salida debida a la señal con respecto a la salida debida al ruido. Para este análisis considérese la Figura 5.4.

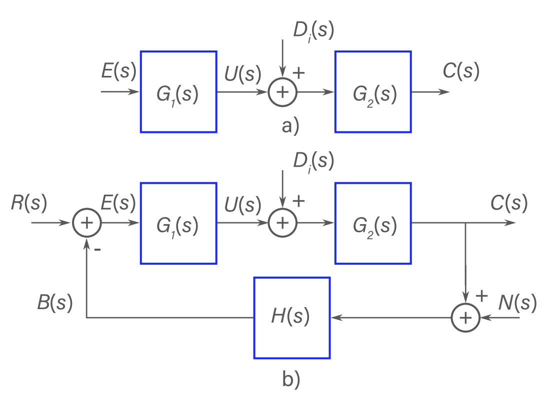


Figura 5.4: Diagrama de bloques con disturbio en la entrada.

Relación señal ruido, sistema en lazo abierto

En lazo abierto, la salida debida a la entrada $R(s)$ ($D_i(s) = 0$ y $E(s) = R(s)$) es

$$C_r(s) = G_1(s)G_2(s)R(s)$$

la salida debida al ruido $D_i(s)$ ($R(s) = 0$), es

$$C_d(s) = G_2(s)D_i(s)$$

la salida es por superposición, la suma de las salidas

$$C(s) = C_r(s) + C_d(s)$$

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)R(s) + G_2(s)D_i(s)$$

y la RSR en lazo abierto es:

$$RSR_{LA} = \frac{C_r}{C_d} = \frac{G_1G_2R(s)}{G_2D_i(s)} = G_1(s)\frac{R(s)}{D_i(s)}$$

Relación señal ruido, sistema en lazo cerrado con ruido en la entrada

La salida $C_r(s)$ debida a la entrada $R(s)$ (con $D_i(s) = 0$) es

$$C_r(s) = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}R(s)$$

la salida debida al ruido $D_i(s)$ ($R(s) = 0$) es

$$C_d(s) = \frac{G_2}{1+G_1G_2H}D_i(s)$$

la salida es, por superposición, la suma de las salidas

$$C(s) = C_r(s) + C_d(s)$$

$$C(s) = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}R(s) + \frac{G_2}{1+G_1G_2H}D_i(s)$$

y la RSR en lazo cerrado es

$$RSR_{LC} = \frac{C_r}{C_d} = \frac{\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}R(s)}{\frac{G_2}{1+G_1G_2H}D_i(s)} = G_1(s)\frac{R(s)}{D_i(s)}$$

Nota 32. Observe que las relaciones señal ruido en lazo abierto y lazo cerrado para disturbios en la entrada, son iguales.▲

Relación señal ruido, sistema en lazo cerrado con ruido en la medida

Considere el lazo típico de realimentación que se muestra en la Figura 5.5. La salida debida a la entrada $R(s)$ ($N(s) = 0$) es

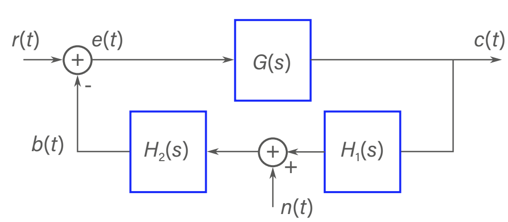


Figura 5.5: Lazo típico con ruido en la medida.

$$C_r(s) = \frac{G}{1+GH_1H_2}R(s)$$

La salida debida al ruido $N(s)$ ($R(s) = 0$) es

$$C_n(s) = \frac{GH_2}{1+GH_1H_2}N(s)$$

la salida es, por superposición, la suma de las salidas

$$C(s) = C_r(s) + C_d(s)$$

$$C(s) = \frac{G}{1+GH_1H_2}R(s) - \frac{GH_2}{1+GH_1H_2}N(s)$$

y la RSR en lazo cerrado es

$$RSR_{LC} = \frac{C_r}{C_d} = \frac{\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}R(s)}{\frac{G_2}{1+G_1G_2H}D_i(s)} = G_1(s)\frac{R(s)}{D_i(s)}$$

Nota 33. Para mejorar la RSR es posible aumentar la ganancia de H_2; sin embargo, esto implica que para mantener la calidad de la señal medida se debe disminuir la ganancia de H_1.▲

Estabilidad

En sistemas de control se reconocen dos tipos de estabilidad, la absoluta (EA) y la relativa (ER). La EA se refiere a la característica de un sistema de entregar en la(s) señal(es) de interés salidas acotadas cuando la(s) entrada(s) es(son) acotada(s). La ER es un indicador de la robustez[6] del sistema para conservar la estabilidad absoluta cuando se modifican las señales de entrada, las condiciones iniciales, o alguno(s) de los parámetros del sistema; por ejemplo, una ganancia.

Se dice que el sistema es estable si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Cuando el sistema es excitado por una entrada acotada, la salida es acotada (estabilidad BIBO - *Bounded Input Bounded Output*).
- El sistema es asintóticamente estable cuando ante la ausencia de señal de entrada, la salida tiende a cero, independientemente de las condiciones iniciales.

Para sistemas en tiempo continuo existen varias técnicas para definir la estabilidad. La primera de ellas es calculando los polos del sistema (raíces de la ecuación característica).

Sea el sistema con función de transferencia en la forma

$$T(s) = k\frac{N(s)}{D(s)}$$

y sean si las "n" raíces de la ecuación característica ($D(s)$) del sistema "$T(s)$", se dice que el sistema es absolutamente estable *si y solo si* todas las raíces de $D(s)$ son estrictamente negativas.

Condiciones necesarias para estabilidad absoluta

Considere la ecuación característica de un sistema, de la forma:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad a_n > 0 \tag{5.18}$$

Una condición necesaria (pero no suficiente) para la estabilidad del sistema lineal, es que todos los coeficientes (a_i) de la ecuación característica sean reales, distintos de cero y tengan el mismo signo.

Un cambio de signo en al menos un coeficiente (ai) de la ecuación característica $D(s)$ indica que hay al menos una raíz con parte real positiva. Cuando el parámetro a_0 de la ecuación característica es igual a cero, indica que existe al menos una raíz en el origen.

Si ocurre más de un cambio de signo, puede ser que existan varias raíces con parte real positiva o que haya raíces sobre el eje imaginario. Por lo que, la ausencia o el cambio de signo de cualquiera de los coeficientes de la ecuación característica ($D(s)$) indican que el sistema es inestable o marginalmente estable.

Nota 34. Para sistemas de primer y segundo orden, el que no existan cambios en los signos de la ecuación característica $D(s)$ es un indicador necesario y suficiente de estabilidad (absoluta) del sistema.▲

Nota 35. El que no existan cambios en los signos de los coeficientes de la ecuación característica $D(s)$ asegura que las raíces reales sean negativas, pero no garantiza que para sistemas de orden tres o superior, tengan la parte real de sus raíces complejas con signo negativo.▲

[6] La robustez es la propiedad que tiene un sistema de conservar la estabilidad bajo condiciones de variaciones en los parámetros con respecto a sus valores nominales.

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Para la ecuación característica $D(s)$ (5.18), se construye el arreglo de Routh-Hurwitz a partir de los coeficientes de $D(s)$ así:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & & & & \\
s^1 & d_1 & 0 & & \\
s^0 & f_1 & 0 & &
\end{array}
$$

donde las dos primeras filas corresponden a los coeficientes de la $D(s)$.

El criterio de Routh-Hurwitz proporciona un método para determinar estabilidad absoluta (no relativa) sin necesidad de calcular las raíces de la ecuación característica; dice que para que el sistema sea *estable*, es necesario y suficiente que todos los elementos de la primera columna del arreglo correspondiente a su ecuación característica, con ($a_n > 0$), sean positivos. Si no se cumple esta condición el sistema es *inestable.*

Nota 36. Si ocurren cambios de signo en los coeficientes de la primera columna del arreglo de Routh-Hurwitz, el sistema es inestable y el número de raíces con parte real positiva es igual al número de cambios de signo.▲

A partir de la tercera fila, los coeficientes son resultados del cálculo siguiendo el procedimiento que se explica a continuación.

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{n-1}}(a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}) \\
b_2 &= \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{n-1}}(a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-3}) \\
b_3 &= \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{n-1}}(a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-5}) \\
c_1 &= \frac{-1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_1}(b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}) \\
c_2 &= \frac{-1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_1}(b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1})
\end{aligned}
\qquad (5.20)
$$

Existen dos casos especiales que se consideran a continuación. Sea el sistema con $D(s)$ de quinto orden de la forma:

$$D(s) = a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \qquad a_5 > 0$$

y el arreglo de Routh-Hurwitz,

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 \\
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & b_1 = \frac{a_4 a_3 - a_5 a_2}{a_4} & b_2 = \frac{a_4 a_1 - a_5 a_0}{a_4} & b_3 = 0 \\
s^2 & c_1 = \frac{b_1 a_2 - b_2 a_4}{b_1} & c_2 = \frac{b_1 a_0 - b_3 a_4}{b_1} & c_3 = 0 \\
s^1 & d_1 = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{c_1} & d_2 = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{c_1} = 0 & \cdots \\
s^0 & f_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1} = c_2 & 0 &
\end{array}
\qquad (5.21)
$$

Si el primer elemento de una fila es cero, este se remplaza por un elemento pequeño de signo positivo ε y se continúa el cálculo con este valor; sea por ejemplo $b_1 = 0$, se remplaza por ε y se continúa el cálculo, de nuevo la estabilidad queda determinada por los cambios de signo de la primera columna.

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 \\
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & b_1 = \varepsilon \approx 0 & b_2 = \frac{a_4 a_1 - a_5 a_0}{a_4} & b_3 = 0 \\
s^2 & c_1 = \frac{\varepsilon a_2 - b_2 a_4}{b_1} & c_2 = \frac{\varepsilon a_0 - b_3 a_4}{\varepsilon} & c_3 = 0 \\
s^1 & d_1 = \frac{b_2 c_1 - \varepsilon c_2}{c_1} & d_2 = \frac{b_3 c_1 - \varepsilon c_3}{c_1} = 0 & \cdots \\
s^0 & f_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1} = c_2 & 0 &
\end{array}
\qquad (5.22)
$$

El otro caso es cuando todos los elementos de la fila son cero; para el ejemplo, sea la fila s^3 con elementos cero (ver la ecuación 5.23); el sistema tiene polos a la derecha del eje imaginario o en el eje imaginario del plano "s". Aquí se pueden remplazar los elementos de la fila ("s^3") por los resultantes de derivar el polinomio auxiliar (PA) que se obtiene de la fila superior

$$PA = a_4 s^4 + a_2 s^2 + a_0$$

en este caso

$$\frac{dPA}{ds} = 4a_4 s^3 + 2a_2 s$$

$$
\left.
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 \\
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & 0 & 0 & \\
s^2 & c_1 & c_2 & \\
s^1 & d_1 & 0 & \cdots \\
s^0 & f_1 & 0 &
\end{array}
\right\} \rightarrow
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 \\
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & 4a_4 & 2a_2 & \\
s^2 & c_1 & c_2 & \\
s^1 & d_1 & 0 & \cdots \\
s^0 & f_1 & 0 &
\end{array}
\qquad (5.23)
$$

Para el análisis de estabilidad absoluta, se continúa viendo si hay cambios de signo en la primera columna. Es posible conocer las raíces a la derecha o en el eje imaginario, al resolver el polinomio auxiliar igualado a cero; en ese caso el ejemplo consiste en calcular las raíces del polinomio auxiliar PA.

Estabilidad relativa

Cuando se tienen sistemas con dinámicas dominantes de segundo orden, el indicador de estabilidad relativa es el coeficiente de amortiguamiento; existen otros indicadores de estabilidad relativa como relación de estabilidad R (que será estudiada en el apartado de lugar geométrico de las raíces), el margen de fase, el margen de ganancia y el margen de módulo (que serán estudiados en el apartado de respuesta en frecuencia) (Dorf, 1989).

Materiales y equipos

En la Tabla 5.2 se listan los elementos necesarios para adelantar la experimentación.

Procedimiento

Encienda su aplicación, puede trabajar con una planta real de forma presencial o remota, o con una planta virtual local o una planta virtual remota (en la Raspberry). Su instructor le indicará la planta que puede trabajar.

Puesta en marcha

Para cualquiera de las plataformas de experimentación que use, debe tener encendida y operando su planta o proceso en el punto deseado de trabajo, inicialmente en lazo abierto.

Una vez cumplidas estas condiciones, proceda según las instrucciones (asegure que su planta es estable; si no lo es, proceda a estabilizarla):

- Registre el valor de la ganancia actual de su planta, para ello debe conocer el valor de la señal que está aplicando a la entrada y el valor de la señal de salida en estado estable.
- Si conoce el rango de trabajo para su señal de entrada y salida, ingrese un escalón a la entrada de la planta, de forma que su salida no supere el $10\ \%$ de su valor nominal. Si no lo conoce, intente con un valor pequeño de su entrada, por ejemplo $+1V$. Repita el mismo procedimiento al contrario, llevando la entrada al valor nominal, luego aplique un escalón negativo y posteriormente (después de que la planta esté estable) regrese al valor nominal. Siempre registre sus datos, puede ser en un archivo tipo texto (ver Figura 5.6).

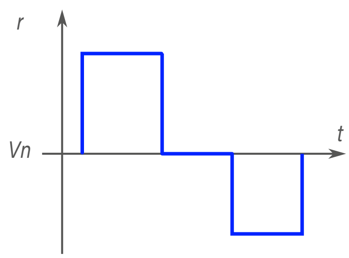
Tabla 5.2: Materiales y equipos.

Cantidad	Nombre	Marca / Modelo	Especificaciones
Hardware			
1	PC	Intel / AMD	Procesador: para trabajar con MATLAB® local: Intel I5 o Ryzen 5, para MATLAB® online: Intel I3 o Ryzen 3. Memoria RAM: 8 GB. Espacio en disco duro: 20 GB.
1	Microcomputador	Raspberry	Pi4 instalada remotamente en el laboratorio de automática.
1	Servomecanismo	Feedback® MS150	Motor DC con tacómetro analógico, para prácticas de control de servomecanismos.
Software			
1	Máquina virtual	Virtual Box	Configuración básica: Memoria RAM: 1.5 GB. Disco duro: 10 GB.
1	Software	WinSCP 1.5	Envío y recepción de archivos, máquina virtual y máquina física.
1	Software	MATLAB®	Versión 2020b.
1	Software	SimulationServer.jar	v1.0. Requiere Pi OS (física o virtual).

Análisis de características

Tome datos de forma ordenada.

- Inserte un bloque proporcional en el lazo directo, con el valor de



ganancia en uno ($K = 1$); compare la ganancia y la velocidad de respuesta (τ y t_s) del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado. Tome datos de forma ordenada.

- Ajuste el valor de la constante de proporcionalidad para conservar la ganancia en el lazo cerrado igual a la ganancia del lazo abierto. Tome datos de forma ordenada.
- Análisis de sensibilidad: con el lazo abierto disminuya el valor de $K = 1$ en un 10 %. ¿Cómo impacta este cambio en la respuesta del sistema en estado estable para las condiciones de lazo abierto? Sustente con cálculos su respuesta.
- Inserte un bloque en la realimentación con $H(s) = 1$; analice el comportamiento de la sensibilidad; repita cuando $H(s)$ es ajustada a 0.9. ¿Cómo impacta este cambio en la respuesta del sistema en estado estable para las condiciones de lazo cerrado? Sustente con cálculos su respuesta.
- Análisis de error. Para la planta en configuración de lazo abierto, después de que se alcance el estado estable, inyecte una pequeña señal de disturbio $D(s)$ con valor constante. ¿Cómo es el comportamiento dinámico y estático (permanente) del error?
  - Si su planta es tipo cero, analíticamente y experimentalmente verifique el error permanente. Después incremente el tipo del sistema introduciendo un integrador en el bloque del controlador y analíticamente y experimentalmente verifique el error permanente. Tome datos de forma ordenada y registre la señal de error.
  - Si su planta es tipo uno, analíticamente y experimentalmente verifique el error permanente. Después incremente el tipo del sistema introduciendo un integrador en el bloque del controlador y analíticamente y experimentalmente verifique el error permanente. Tome datos de forma ordenada y registre la señal de error.
- Repita el experimento anterior, ahora cerrando el lazo.
- Capacidad de seguir en régimen permanente señales de tipo escalón sin disturbio en la carga. Analice la capacidad del sistema en lazo cerrado con los dos controladores propuestos (1.$K = 1$, 2.$K = 1/s$) para seguir la señal de referencia usando los dos controladores.

Informe

Elabore su reporte donde, de forma estructurada, organizada y profesional, informe:

1. Datos experimentales tabulados.
2. Modelo estático: rangos de linealidad del sistema.
3. Gráfica de la respuesta al escalón.
4. Valores de los parámetros y modelo matemático experimental.
5. Gráficas de la simulación para diferentes valores de entrada y ganancia.
6. Respuesta a las preguntas planteadas en el procedimiento, observaciones y conclusiones.

Para cada punto se recomienda usar un cuadro, por ejemplo:

Características de la respuesta dinámica.

Red abierta	Red cerrada