

Capítulo 3

MODELADO HEURÍSTICO DEL PROCESO

 <https://doi.org/10.25100/peu.1416.cap3>

Objetivos y resultados de aprendizaje

Objetivo general

Hallar el modelo matemático de sistemas dinámicos típicos por la técnica de curva de reacción.

Objetivos específicos

- Hallar el modelo matemático estático de sistemas dinámicos típicos por la técnica de curva de reacción.
- Establecer las características de los sistemas realimentados,
- Hallar el modelo matemático dinámico de sistemas dinámicos típicos por la técnica de curva de reacción.

Resultados de aprendizaje

Al finalizar, el estudiante:

- Aplica el procedimiento para determinar el comportamiento estático de un sistema SISO.
- Aplica técnicas para obtener experimentalmente la respuesta en el tiempo de los SAC en lazo abierto.
- Determina el modelo dinámico de los SAC a partir de la respuesta en el tiempo.
- Analiza la respuesta transitoria de los sistemas dinámicos de primer y segundo orden.

Marco teórico

Modelos estáticos

La característica de un proceso estático es una curva que da la relación de estado estable entre la señal de entrada al proceso y la salida (ver Figura 3.1).

Todo procedimiento de modelamiento heurístico debe iniciar determinando un modelo estático del proceso; este puede ser usado para determinar el rango de señales de entrada y salida sobre los cuales se desea operar el proceso.

Los asteriscos en $c^*(t)$ y $u^*(t)$ significan que solo se consideran los valores en estado estable para trazar esta curva.

Para pequeñas desviaciones, el modelo de un proceso estático puede ser descrito por un parámetro, llamado la ganancia. Estas pequeñas desviaciones se conocen como “la razón de los cambios en estado estable entre la salida y la entrada del proceso”.

A partir del conocimiento de la característica estática se selecciona el punto de operación deseado para el proceso o planta, y el rango de operación; posteriormente esta información es usada para determinar el modelo lineal.

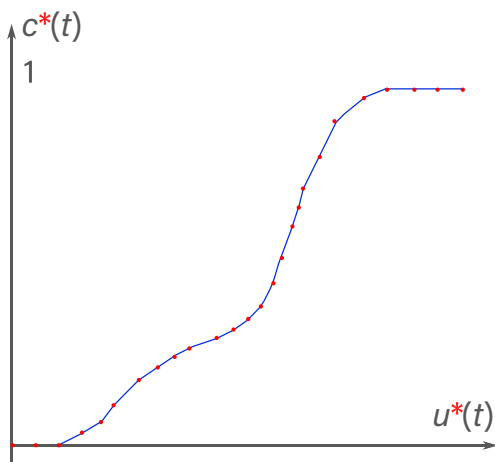


Figura 3.1: Característica estática ejemplo para una planta SISO.

Modelos dinámicos

Un modelo dinámico proporciona información entre la entrada y la salida durante los regímenes transitorio y estacionario. Heurísticamente, se pueden determinar a través de curvas de reacción para sistemas en un rango lineal de operación; se asume que los sistemas son, además, invariantes en el tiempo.

La dinámica de un sistema está caracterizada en términos de la respuesta a una señal de prueba típica; en los sistemas dinámicos discutidos aquí solo se considera la relación entre dos señales típicas: la señal de control y la variable medida (para sistemas SISO). Como señales de entrada a la planta (señal de control) se usan típicamente señales tipo escalón, rampa o aceleración.

Una vez corrido el experimento, se procede a obtener el modelo matemático que representa el sistema dinámico.

Nota 3. Se aclara que solo se podrán modelar sistemas que sean estables; si en alguna situación la planta

o proceso es inestable, se deberá proceder primero a estabilizarla y posteriormente, para el sistema estabilizado, se procede a realizar el experimento. ▲

Antes de continuar con las técnicas de modelado, se presenta el análisis temporal de sistemas dinámicos típicos.

Análisis de respuesta temporal

La respuesta temporal de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario. Como un sistema físico incluye almacenamiento de energía, cuando está sujeto a una entrada no la puede seguir en forma inmediata, presentando un comportamiento transitorio antes de alcanzar el estado de equilibrio o estacionario.

Al diseñar un sistema de control, se puede predecir el comportamiento dinámico del sistema partiendo del conocimiento de los componentes.

Al analizar un sistema se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria, como por ejemplo el tiempo requerido para alcanzar el nuevo estado de reposo y el valor del error mientras sigue la señal de entrada, así como el comportamiento en estado estacionario. A continuación se analizan las respuestas temporales de sistemas típicos de primer y de segundo orden.

Respuesta a un escalón de sistemas de primer orden

Los sistemas de primer orden se caracterizan porque en el tiempo la máxima derivada que relaciona la salida con la entrada es de orden uno. Las plantas con modelos típicos de primer orden se caracterizan por tener en el denominador un polinomio de primer orden cuando está en el dominio de la variable compleja “s”, como se ve en la ecuación 3.1.

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \quad (3.1)$$

Si se aplica a la entrada de la planta una señal tipo escalón unitario, la salida se puede expresar como se muestra en la ecuación 3.2.

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1+\tau s} \quad (3.2)$$

Al resolver esta ecuación usando la transformada inversa de Laplace se obtiene la expresión en la ecuación 3.3.

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{1+\tau s}\right\} \\ &= 1 - e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (3.3)$$

La salida es cero en $t = 0$ y finalmente evoluciona hasta la unidad; el trazo o gráfico de la respuesta dinámica se muestra en la Figura 3.2. Una característica importante para representar esta curva de reacción es el tiempo que tardaría en alcanzar el estado estable si continuara con la dinámica inicial; este tiempo " τ " coincide con el tiempo en que la curva alcanza el valor 63.2 % del valor final y se reconoce como la constante de tiempo (τ) del sistema de primer orden, lo cual se puede ver fácilmente al sustituir $t = \tau$ en la ecuación 3.3, es decir:

$$c(\tau) = 1 - e^{-\tau/\tau} = 1 - 0.367879 = 0.632 \quad (3.4)$$

Note que cuanto más pequeña sea la constante de tiempo $t = \tau$ (ver Figura 3.2), más rápida es la respuesta del sistema. También se observa que la pendiente inicial de la curva exponencial, la pendiente de la recta tangente en $t = 0$, es $1/t = 1/\tau$.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left(\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\right)_{t=0} = \frac{1}{\tau} \quad (3.5)$$

Para $t = 3\tau, 4\tau, 5\tau$ la respuesta alcanza (respectivamente) el 95 %, 98.2 % y 99.3 % del valor final; así, para $t = 4\tau$, la respuesta se encuentra dentro del 2 % del valor final, la cual para efectos prácticos es considerada como una estimación razonable del tiempo de respuesta.

Una propiedad importante de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo es que la respuesta a un escalón unitario se puede obtener de la derivada de la respuesta a una rampa con pendiente unitaria, y finalmente la respuesta a un impulso unitario se puede obtener de la respuesta al escalón unitario; esto es una ventaja favorable en el análisis de modelos de procesos, puesto que existen sistemas que no se pueden analizar con el escalón unitario, pero se puede obtener el modelo realizando el análisis con la rampa unitaria y derivando la respuesta.

Respuesta al escalón de sistemas de segundo orden

Un sistema dinámico de segundo orden en la forma canónica se representa con la función de transferencia de la ecuación 3.6.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad (3.6)$$

Recordando que el polinomio del denominador se conoce como la ecuación característica $E_c(s)$ (también conocido como polinomio característico), a saber:

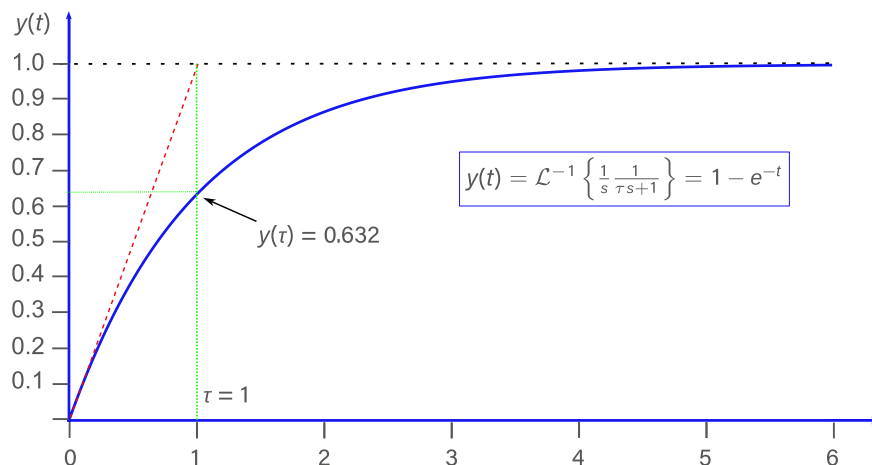


Figura 3.2: Respuesta típica de un sistema de primer orden.

$$E_c(s) = s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 \quad (3.7)$$

la respuesta ante una señal de entrada tipo escalón unitario $C(s)$ (ver ecuación 3.8)

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)} \frac{1}{s} \quad (3.8)$$

dependerá de los valores de los parámetros o de la ubicación de las raíces del polinomio característico (polos); las raíces del polinomio característico se obtienen resolviendo el binomio cuadrado perfecto ($as^2 + bs + c$); así, $a = 1$, $b = 2\xi w_n$, $c = w_n^2$, cuya solución es

$$((-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a).$$

De ese modo, las raíces de $E_c(s)$ están dadas por

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi w_n \pm \sqrt{(2\xi w_n)^2 - 4w_n^2}}{2} = -\xi w_n \pm w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

La respuesta ante una entrada tipo escalón unitario, para $t \geq 0$, se obtiene a través de la transformada inversa de Laplace de la ecuación (3.8)

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{L}^{-1}(C(s)) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \frac{w_n^2}{(s + \xi w_n + jw_d)(s + \xi w_n - jw_d)}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \frac{s + 2\xi w_n}{(s + \xi w_n + jw_d)(s + \xi w_n - jw_d)}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \frac{s + 2\xi w_n}{(s + \xi w_n)^2} - \frac{\xi w_n}{(s + \xi w_n)^2}\right) \\ &= 1 - e^{-\xi w_n t} \cos(w_d t) - e^{-\xi w_n t} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(w_d t) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \\ w_d &= w_n \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

El sistema será estable si la parte real de los polos es negativa, esto se logra si $-\xi w_n < 0$. Por otro lado, si $-\xi w_n < 0$ (esto es, si $0 < \xi < 1$), los polos son complejos conjugados; y si $(\xi^2 - 1) < 0$ (esto es, si $0 < \xi < 1$), los polos son complejos conjugados; y si $(\xi^2 - 1) \geq 0$ (esto es, si $\xi \geq 1$), los polos son reales.

Los polos pueden ser representados a través de la ubicación en el plano complejo "s", como se muestra en la Figura 3.3.

Resumiendo, el comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se puede describir en térmi-

nos de los parámetros ξ y w_n . Si $0 < \xi < 1$, el radical en w_d es negativo, w_d es imaginaria y los polos de lazo cerrado son complejos conjugados quedando ubicados en el semiplano izquierdo; se dice entonces que el sistema es "subamortiguado" y la respuesta es oscilatoria. Si $\xi = 1$ se dice que el sistema es críticamente amortiguado y si $\xi > 1$ el sistema es "sobreamortiguado". La respuesta transitoria de sistemas críticamente amortiguados y de sistemas sobreamortiguados se caracteriza porque no presenta oscilaciones. Finalmente, si $\xi = 0$, la respuesta transitoria no se extingue.

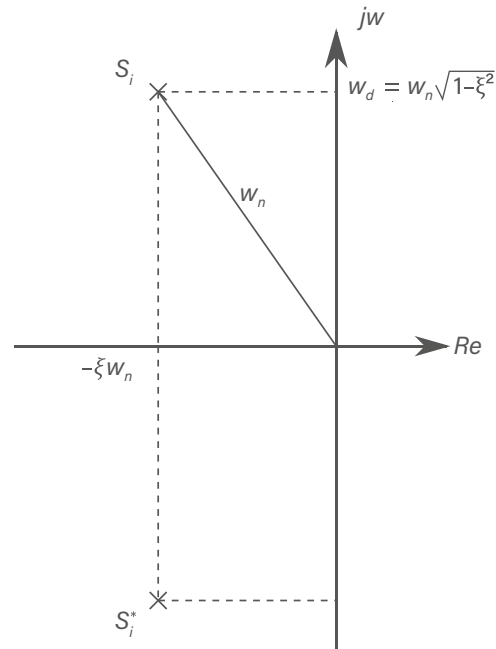


Figura 3.3: Ubicación de polos complejos conjugados, plano "s".

A continuación se revisará cada caso.

Caso subamortiguado, $\xi \leq 0$

La salida del sistema, señal $c(t)$ (ecuación 3.9)

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(w_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}), t \geq 0$$

presenta una oscilación sinusoidal amortiguada; la frecuencia de oscilación transitoria es la frecuencia natural amortiguada w_d y varía con la relación de amortiguamiento ξ .

Los parámetros de la respuesta transitoria (ver Figura 3.4) se definen a continuación:

- Tiempo de retardo, t_d : el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar la mitad del valor final por primera vez.
- Tiempo de crecimiento, t_r : es el tiempo requerido para que la respuesta aumente del 10 % al 90 %, del 5 % al 95 % o del 0 % al 100 % de su valor final. Para sistemas de segundo orden subamortiguados se usa normalmente de 0 % al 100 %. Para el caso de sistemas sobreamortiguados se usa del rango del 10 % al 90 %.
- Tiempo de pico, t_p : es el requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreimpulso.
- Sobreimpulso máximo, M_p : es el valor del pico máximo de la curva de respuesta medido desde el valor final.
- Tiempo de establecimiento, t_s : tiempo necesario para que la respuesta alcance y se mantenga en un rango alrededor de su valor final, con una magnitud especificada por el porcentaje absoluto del valor final del 5 %, del 2 % o del 1 %.

Nota 4. El tiempo de establecimiento está relacionado con la constante mayor del sistema; el criterio para fijar el porcentaje de error depende de los objetivos de diseño del controlador.▲

Nota 5. Si ξ se hace cero, la respuesta es de la forma

$$c(t) = 1 - \cos(\omega_n t), \quad t \geq 0$$

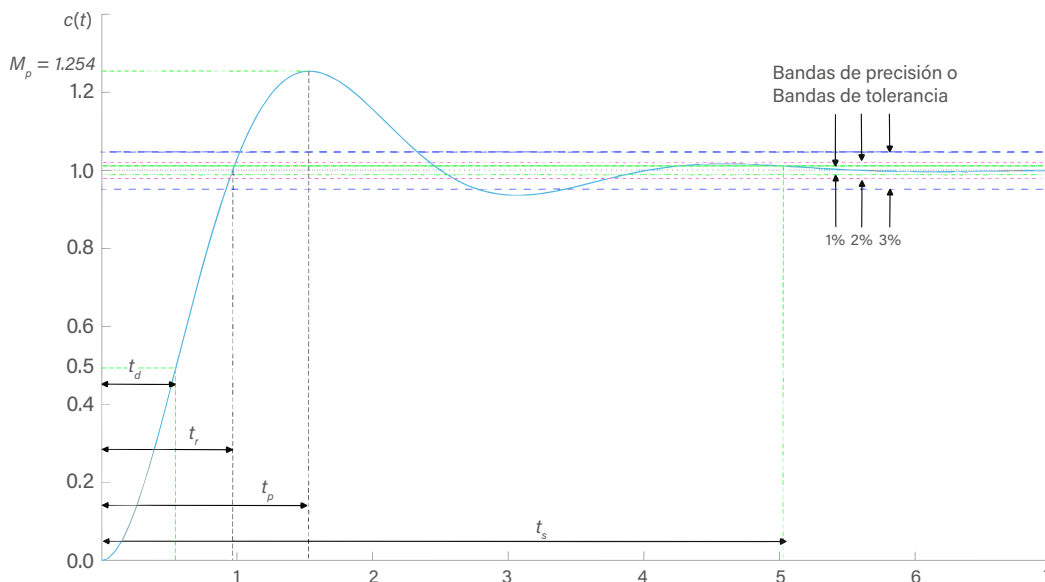


Figura 3.4: Respuesta típica sistema subamortiguado. Fuente: adaptada de Ogata (1993).

la oscilación continúa indefinidamente con $\omega_d = \omega_n$ como la frecuencia de oscilación.▲

Caso de amortiguamiento crítico, $\xi = 1$

Si los dos polos del polinomio característico son iguales, se dice que el sistema es críticamente amortiguado.

Nota 6. Si los polos son reales y están muy cerca entre sí, el sistema se puede aproximar por uno de amortiguamiento crítico.▲

Para una entrada escalón ($R(s) = 1/s$), la respuesta (al escalón) se puede escribir como:

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \quad (3.10)$$

La función de respuesta en el tiempo es:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (3.11)$$

Caso sobreamortiguado, $\xi > 1$

En este caso los polos del polinomio característico son reales, negativos y diferentes.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)}$$

Nota 7. Consultada la tabla de transformadas inversas de Laplace se encuentra:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right] \blacktriangle$$

Para una entrada escalón unitario, y con

$$s_1 = (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})w_n$$

$$s_2 = (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})w_n$$

la respuesta se puede escribir como:

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{w_n^2}{(s+s_1)(s+s_2)}$$

$$C(t) = 1 + \frac{w_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{e^{(-s_1)t}}{s_1} - \frac{e^{(-s_2)t}}{s_2} \right)$$

Si $\xi \gg 1$, una de las raíces (para la explicación, suponga que s_2) está más cerca al eje jw ; lo que indica que, en términos absolutos, la magnitud de la raíz correspondiente al otro polo (s_1) será más grande, el efecto de s_1 en la respuesta disminuye con mayor rapidez que el término que incluye a s_2 . En este caso, el término de la solución correspondiente al polo s_1 se puede despreciar; una vez desaparecido el término, la respuesta al escalón es similar a la de un sistema de primer orden y se puede aproximar a este.

Nota 8. Dos sistemas con la misma ξ y diferente w_n presentan el mismo sobreimpulso y el mismo esquema oscilatorio.▲

Nota 9. Un sistema subamortiguado con $0.5 < \xi < 0.8$

se aproxima con mayor rapidez al valor final que un sistema críticamente amortiguado o que un sistema sobreamortiguado.▲

Nota 10. Entre los sistemas que responden sin oscilación, un sistema críticamente amortiguado presenta una respuesta más rápida.▲

Nota 11. Un sistema sobreamortiguado es siempre más lento en su respuesta a cualquier entrada.▲

Nota 12. No todas las especificaciones son aplicables; por ejemplo, para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos de tiempo de pico y sobreimpulso máximo.▲

Nota 13. Si se desea que la respuesta de un sistema típico de segundo orden sea suficientemente rápida y amortiguada, la relación de amortiguamiento debe estar entre 0.4 y 0.8; valores pequeños de ξ (< 0.4) producen sobreimpulso excesivo; un sistema con un valor de ξ muy grande (> 0.8), responde lentamente.▲

Nota 14. El tiempo de establecimiento se determina en correspondencia con una banda de tolerancia; típicamente se toman bandas de $\pm 2\%$ o de $\pm 5\%$ del valor final.▲

Nota 15. Para facilitar la comparación de las respuestas de diferentes sistemas, se suele definir el tiempo de establecimiento t_s , como $t_s = 4\tau$ (criterio del 2%) o $t_s = 3\tau$ (criterio del 5%).▲

Nota 16. Si la relación de amortiguamiento está entre 0.4 y 0.8, el porcentaje de sobreimpulso máximo para la respuesta escalón está entre el 25% y el 2.5%, respectivamente.▲

Respuesta de sistemas con ceros

Un cero es una raíz solución del polinomio en el numerador de la función de transferencia; hasta ahora se ha revisado el efecto de los polos en la respuesta dinámica; pero, ¿cómo afectan los ceros la respuesta del sistema? Este tema es importante para el análisis y diseño de los controladores. Brevemente, se verá el efecto en tres casos.

Suponga un proceso con dinámica de primer orden y con un cero de la forma:

$$G(s) = \frac{(s+z)}{(z+p)}$$

donde se reconocen tres condiciones:

1. El cero es negativo a la derecha del polo.
2. El cero es negativo a la izquierda del polo.
3. El cero es positivo, tal que $s = z$ está ubicado a la derecha del plano complejo "s".

Asumiendo lazo típico de control con realimentación unitaria negativa, y con función de transferencia

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{(s+z)}{(s+p)+(s+z)} = \frac{s+z}{2s+p+z}$$

Se puede observar que se conserva en red cerrada el cero de lazo abierto, o que el cero de lazo abierto es un cero de lazo cerrado, mientras que el polo de red abierta al cerrarse el lazo se desplaza a

$$s = -\frac{p+z}{2}$$

de donde se puede apreciar que si el cero se encuentra a la derecha del plano "s", y si $|p| > |z|$, el polo resultante estará a la izquierda del plano "s" y el sistema en red cerrada conserva la estabilidad; en caso contrario el sistema se hace inestable, y en el caso en que $|s| = |z|$ el polo de red cerrada resultante estará en el origen y el sistema se hará marginalmente estable.

Nota 17. Se observa cómo un cero puede llegar a hacer inestable un sistema estable.▲

Nota 18. Se puede observar que la respuesta al escalón de este sistema al comienzo presenta un comportamiento contrario al deseado.▲

Nota 19. Para sistemas de segundo orden, el cero cambia la respuesta dinámica en función de la relación $\alpha = z/p$, donde z es el cero y p es el polo. Se recomienda revisar este efecto a través de simulaciones en MATLAB® o en otro texto.▲

Estimación de modelos a partir de curva de reacción

Existen varias técnicas heurísticas para realizar la estimación de modelos a partir de curvas de reacción; sin embargo, en esta práctica solo se verá el método de estimación en lazo abierto. Esta técnica de estimación (o de identificación) se realiza eliminando los lazos de realimentación, se aplican señales de prueba típicas y se analiza la forma de la respuesta. La técnica se basa en que la mayoría de los procesos industriales tiene respuesta monótona creciente estable a una entrada escalón; el método de respuesta al escalón está limitado para la determinación de modelos simples.

El requerimiento para esta técnica es que el sistema esté inicialmente en reposo, antes de que la señal de prueba sea aplicada; desde luego, es difícil lograr reposo absoluto debido a fluctuaciones pequeñas asociadas a disturbios no considerables o a errores en las medidas.

Para realizar esta prueba es conveniente determinar con anterioridad la región lineal (a partir de la caracterización estática) donde se realizará el modelamiento.

Los modelos matemáticos de sistemas SISO se pueden obtener de la respuesta al escalón; las señales tipo que se logran se presentan en la Figura 3.5 y serán objeto de revisión en esta guía. En el eje de las abscisas (eje x) se muestra la escala de tiempo en unidades sin definir; en el eje de las ordenadas o "eje y" se presenta la señal de salida $c(t)$ en unidades sin definir.

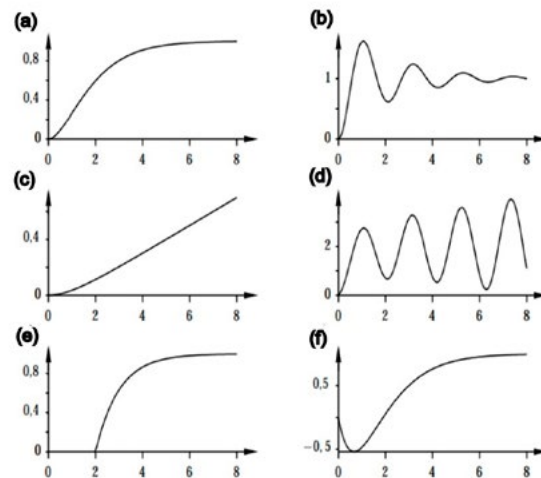


Figura 3.5: Respuestas típicas de sistemas SISO. Fuente: Åström y Hägglund (1995).

En la Figura 3.5a la salida del proceso cambia monótonamente a un nuevo valor estacionario, este es el tipo de respuesta más común encontrada en los procesos industriales.

En la Figura 3.5b la salida del proceso oscila alrededor de su valor estacionario final hasta alcanzar el estado estable.

El sistema de la Figura 3.5c muestra un proceso integrador; un ejemplo de un proceso integrador es el control de nivel sin flujo de salida; otro, un sistema de almacenamiento de un gas en una pipa o pipeta.

El sistema de la Figura 3.5d representa un sistema inestable típico de sistemas RLC o masa amortiguador mal condicionados, con presencia de polos complejos conjugados a la derecha del "plano s".

El sistema de la Figura 3.5e presenta una respuesta monótonamente creciente con un tiempo muerto de

dos unidades de tiempo; este fenómeno ocurre cuando hay retardo de transporte en el proceso; por ejemplo, almacenamiento de energía o masa, o un sistema de transporte en ductos o tuberías.

El sistema de la Figura 3.5f es un sistema de fase no mínima, donde la señal medida se mueve inicialmente en la dirección contraria; se dice que este sistema tiene "subpaso".

Para representar los sistemas con los comportamientos descritos en la Figura 3.5 se usan modelos matemáticos que llamaremos "modelos dinámicos" y se reconocen varios "modelos tipo"; se encuentran modelos de dos parámetros, de tres parámetros, de cuatro parámetros, modelos con integradores y modelos oscilatorios. A continuación se revisa cada uno.

Modelos de dos parámetros

El modelo paramétrico más simple de un proceso dinámico tiene dos parámetros, la ganancia y el tiempo de establecimiento, como se muestra en la ecuación 3.12

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+ts} \quad (3.12)$$

Cuando a la entrada se aplica un escalón y se obtiene la respuesta, como se observa en las Figuras 3.2, 3.5a y 3.6, el parámetro τ indica el tiempo que tarda la señal en alcanzar el valor en estado estable si continúa la tendencia dada por la recta tangente en el punto de inflexión (ver Figura 3.6).

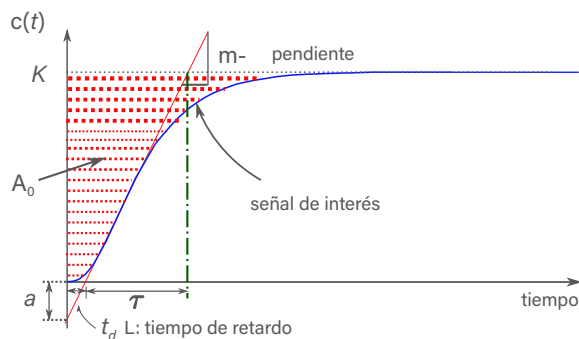


Figura 3.6: Respuesta típica de planta con retardo. Fuente: adaptada de Åström y Hägglund (1995).

Usando la respuesta de la Figura 3.2 se observa que τ corresponde al 63.2 % del valor alcanzado en el estado permanente o estacionario y K es la ganancia del sistema, o sea la relación

$$K = \frac{c(t \rightarrow \infty)}{u(t \rightarrow \infty)}$$

Si la respuesta es como se aprecia en la Figura 3.6, el cálculo del parámetro τ se realiza como lo muestran Åström y Hägglund (1995)

$$\tau = \frac{A_0}{K}$$

donde A_0 es el área sobre la curva, como se ilustra en la Figura 3.6.

$$A_0 = \int_0^{\infty} (c(\infty) - c(t)) dt$$

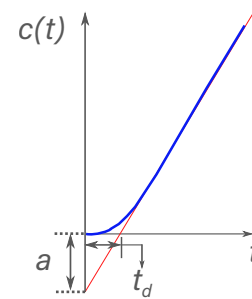


Figura 3.7: Respuesta de planta con integración pura. Fuente: adaptada de Åström y Hägglund (1995).

Nota 20. Obsérvese que si $u(0) = 1$, $u(t \rightarrow \infty) = 1$, $c(0) = 0$, entonces $c(t \rightarrow \infty) = K$. ▲

Otro modelo de dos parámetros se presenta en la ecuación 3.13, y representa el comportamiento dinámico de la Figura 3.7; corresponde a un integrador con tiempo de retardo (t_d) como se muestra en la ecuación 3.13.

$$G(s) = \frac{a}{st_d} e^{-st_d} \quad (3.13)$$

Este modelo es caracterizado por dos parámetros a y t_d que son fácilmente determinados gráficamente de la respuesta al escalón, como se puede ver en las Figuras 3.6 y 3.7.

El tiempo de establecimiento para el primer modelo (ecuación 3.12) tiene buena aproximación en bajas frecuencias pero muy pobre en altas frecuencias.

El segundo modelo es pobre en bajas frecuencias pero razonablemente bueno en el rango de frecuencias medias.

Modelos de tres parámetros

Para respuestas como la Figura 3.5a, que se repite más detallada en la Figura 3.8, se obtiene una mejor aproximación incrementando el número de parámetros, con lo que el modelo puede representarse por:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-st_d} \quad (3.14)$$

donde: K =ganancia estática, τ =constante de tiempo, t_d =tiempo muerto.

Para determinar τ , un método es igualándolo a la distancia AC en la Figura 3.8, donde el punto C es el tiempo cuando la tangente intercepta la línea $c(t)=K$. Otro método es determinar τ de la distancia AB , donde B es el tiempo cuando la respuesta al escalón alcanza el valor $0.632K$; ambos métodos dan idénticos resultados para este modelo, aunque el método basado en el punto B da mejores aproximaciones; otros métodos tienden a sobrestimar el valor de τ .

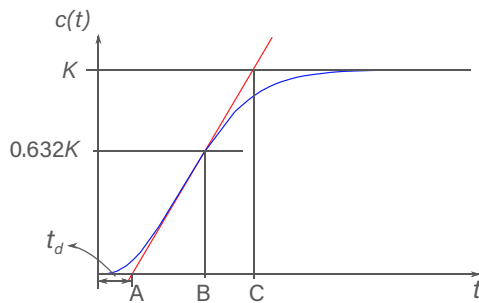


Figura 3.8: Respuesta de planta con integración y tiempo de retardo. Fuente: adaptada de Åström y Hägglund (1995).

Nota 21. Este modelo es la base para procedimientos de sintonía como el conocido “método de Ziegler-Nichols.”▲

Modelos de cuatro parámetros

La mejor aproximación puede ser obtenida de la función de transferencia que se presenta en la ecuación 3.15; este modelo tiene cuatro parámetros: la ganancia K , las constantes de tiempo T_1 y T_2 , y el retardo de transporte (t_d). La ganancia puede ser obtenida del valor de estado estable de la respuesta escalón. El tiempo muerto puede ser obtenido de la misma forma que en el modelo de tres parámetros, dibujando la tangente de la máxima pendiente de $c(t)$. Las constantes de

tiempo T_1 y T_2 pueden ser obtenidas de la ecuación 3.15, definiendo dos puntos de la respuesta escalón.

$$G(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)} e^{-st_d} \quad (3.15)$$

Modelos con integradores

Algunos sistemas de control de procesos tienen una dinámica que incluye integradores o constantes de tiempo muy grandes. Estos sistemas no alcanzarán el estado estable bajo condiciones de lazo abierto (ver Figuras 3.5c, 3.5d y 3.7). Por ejemplo, la planta con

$$G(s) = \frac{1}{sT}$$

tiene una constante de tiempo infinita, por lo que nunca alcanzará el estado estable. La ecuación 3.13 puede representar este tipo de sistemas; sin embargo, esta ecuación no es precisa a altas frecuencias, por lo que se prefiere usar la siguiente ecuación:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+Ts)} e^{-st_d} \quad (3.16)$$

Este modelo se caracteriza por tres parámetros: la ganancia K , la constante de tiempo T , y el tiempo muerto t_d .

La respuesta al escalón del modelo anterior es:

$$c(t) = K(t - T - t_d)(1 - e^{-(t-t_d)/T}) \quad (3.17)$$

La ganancia K y la constante de tiempo T se pueden determinar de la ecuación 3.17 en el tiempo $t = t_d + T$ y despejando,

$$\begin{aligned} c(t_d + T) &= K(t_d + T - T - t_d)(1 - e^{-(t_d + T - t_d)/T}) \\ &= Kt_d e^{-1} = \frac{Kt_d}{e} \end{aligned}$$

Modelos de sistemas oscilatorios

Un modelo de tres parámetros que describe las oscilaciones expresadas en una curva de reacción, como la de la Figura 3.4, está dado en la función de transferencia 3.6.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = K \frac{w_n^2}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2}$$

donde: K = ganancia estática, w_n = frecuencia natural, ρ = relación de amortiguamiento, t_p = periodo de oscilación.

Los tiempos t_p y t_d se pueden obtener de la curva de reacción, considerando que matemáticamente estos parámetros están relacionados con ρ y w_n , por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\rho^2}} \\ &= \frac{\pi}{w_d} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Conocido t_p se puede conocer w_d . A partir del máximo sobrepaso,

$$Mp = e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega}\right) \pi}$$

se despeja y se calcula σ

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho w_n \\ &= \frac{w_d}{\pi} \ln Mp \end{aligned}$$

También puede calcularse a partir del tiempo de establecimiento, por ejemplo para un criterio del 2 %,

$$t_s = \frac{4}{\rho w_n} = \frac{4}{\sigma}$$

entonces,

$$\sigma = \frac{4}{t_s}$$

ρ se extrae de las curvas normalizadas de Mp vs ρ de un texto de control (ver Figura 3.9) y con este valor se calcula $w_n = \sigma/\rho$, para de esta manera definir completamente el modelo. El valor de la ganancia K se calcula de la relación de salida contra entrada en estado permanente.

Nota 22. Si es necesario, el tiempo de retardo puede determinarse de la misma forma que en los modelos anteriores, trazando la tangente de la máxima pendiente de la curva de respuesta.▲

Nota 23. Las técnicas de ajuste y de diseño de controladores parten de un modelo del sistema. La buena calidad o selección del modelo en función de las condiciones de operación define el buen controlador que se vaya a implementar.▲

Materiales y equipos

Para esta práctica se empleará el servomecanismo del laboratorio. Puede hacerse 100 % presencial, 100 % remota a través de PERI, o una combinación de las dos anteriores. También es posible realizarla usando otros procesos o sistemas que permitan recuperar la respuesta dinámica. En la Tabla 3.1 se listan los elementos necesarios para adelantar la experimentación.

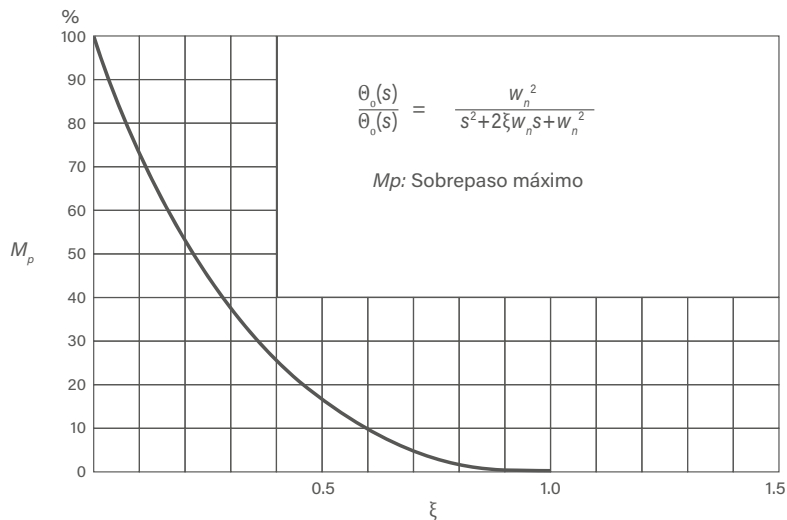


Figura 3.9: Relación entre el máximo paso y el coeficiente de amortiguamiento ρ para sistema subamortiguado de segundo orden. Fuente: Ogata (1993).

Procedimiento

Caracterización estática

El paso inicial consiste en realizar un barrido de la señal de entrada que permita extraer la característica estática del proceso ($c^*(t)$ contra $u^*(t)$) para el sistema en lazo abierto.

Analice las señales de salida y de entrada determinando los rangos de operación (valores máximos y mínimos posibles).

A continuación se selecciona un punto de operación y se aplica de nuevo la respuesta al escalón en pequeña señal desde el punto de operación. Para ello se sugiere realizar el siguiente procedimiento y registrar la señal de salida del sistema. Con los datos obtenidos construya una gráfica estática de la respuesta del sistema (puede realizarse sobre un papel cuadrículado o almacenándolos en un archivo de hoja de cálculo, como Excel®).

Posteriormente se registra la curva de reacción sobre el punto de operación, se analizan los datos y se realiza el informe como aparece descrito en esta guía. A continuación detalles del procedimiento:

1. Para determinar el tiempo de estabilización y la amplitud máxima entrada-salida de su sistema, aplique un escalón en la entrada, como se ilustra en la Figura 3.10.

Esta información le permitirá determinar el tiempo de estabilización de su sistema y si existe saturación.

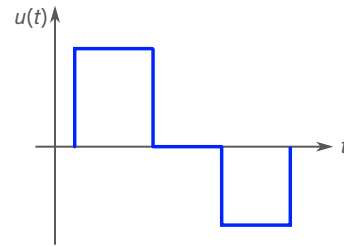


Figura 3.10: Escalón de prueba.

2. Para el rango de entrada de la señal de control $u(t)$ (u_{max} : señal máxima antes de que el sistema se sature) divida el rango entre 5 y 10 valores, a su criterio. Por ejemplo, si el rango de la señal de entrada es 10 (desde 0 hasta 10), y lo divide en cinco partes, seleccione escalones de 2.

A continuación aplique la señal de entrada a la planta (como se aprecia en la Figura 3.11) y observe el tiempo que tarda en estabilizarse en cada escalón; el tiempo de estabilización es el tiempo que tarda la salida en alcanzar un valor estable después de que

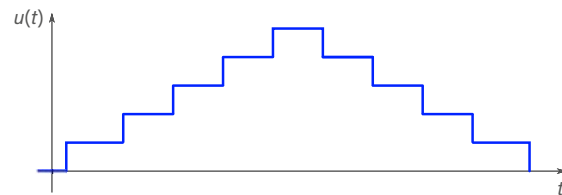


Figura 3.11: Escalones para el experimento.

Tabla 3.1: Materiales y equipos.

Equipos			
Cantidad	Nombre	Marca / Modelo	Especificaciones
1	Proceso o planta		Pregunte a su profesor o instructor.
1	PC	Intel / AMD	Requisitos recomendados: Procesador para trabajar con MATLAB® local : Intel I5 o Ryzen 5, para MATLAB® online: Intel I3 o Ryzen 3. Memoria RAM: 8 GB. Espacio en disco duro: 20 GB.
1	Microcomputador	Raspberry	Pi4.
Software			
1	Software	WinSCP 1.5	Envío y recepción de archivos máquina virtual y máquina física.
1	Software	MATLAB®	Versión 2019 o superior.
1	Software	SimulationServer.jar	Versión 1.0

se haya aplicado un escalón de entrada. Por último, reajuste el valor de entrada de forma incremental, tanto positiva como negativamente, hasta cubrir todo el rango de entrada.

3. Aplique la señal de entrada diseñada y registre los valores de estado estacionario de la salida $c(t)$ y la señal de entrada $u(t)$ ($c^*(t)$, $u^*(t)$), tanto en un archivo de texto como en una imagen.
4. Construya la gráfica de la respuesta del sistema en régimen estático ($c^*(t)$, $u^*(t)$) sobre una hoja de papel con cuadrícula; además, guarde los datos en un archivo (puede ser un arreglo en MATLAB® o en Excel®). Nota: El registro debe contener los datos de " $c^*(t)$ " contra " $u^*(t)$ ".

Análisis de características estáticas de sistemas en lazo abierto

5. A partir de los resultados obtenidos, determine el rango de valores para las variables de entrada y salida (y si su sistema presenta esas características: zona muerta, saturación, linealidad, comportamiento exponencial y comportamiento parabólico) y registre los valores y rangos.

Identificación del modelo por el método de curva de reacción

6. Inicialice su sistema (proceso, servomecanismo, la máquina virtual o la Raspberry pi (RbP) –dependiendo de si la tiene virtual o física–.
7. Para la planta asignada (Planta X), configure la aplicación para ejecución del programa; si es en LabVIEW®, el instrumento virtual para la planta en lazo abierto (VI), si es con la Raspberry configure en "SimulationServer.jar" según su caso y corra el programa en la RbP.

Nota 24. Si ha de trabajar en una de las plantas de la plataforma PERI, deberá solicitar a su instructor que le habilite la planta.▲

8. Elija algún valor de entrada justo en medio de la zona de linealidad, ese será a partir de ahora su punto de operación. Por ejemplo, a partir de la curva estática halló que para entradas su sistema

responde linealmente entre 0.7 y 2.3, entonces 1.5 puede ser de ahora en adelante su punto de operación nominal, por lo que en la Figura 3.12, k es 1.5 y r no deberá ser mayor de $(2.3-0.7)/2$. Elija un segundo valor de entrada dentro de la zona de linealidad, incremente su entrada al nuevo valor, esa será su entrada escalón y tendrá una salida ($c(t)$). Observe la respuesta transitoria, guarde sus datos en un archivo.

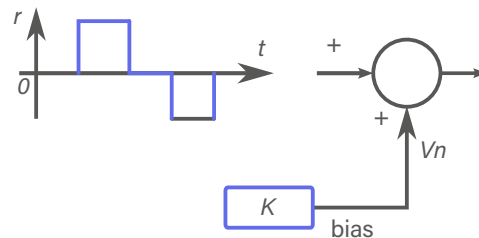


Figura 3.12: Bloques para excitar la planta en el punto de operación.

9. Cuando el sistema se haya estabilizado en su punto de operación, modifique de nuevo su entrada con un nuevo valor de escalón; puede ser como se aprecia en la Figura 3.12. El sistema mostrará entonces su respuesta transitoria ante el escalón y luego se estabilizará en un nuevo valor.

Nota 25. En caso de trabajar sobre un proceso físico en laboratorio, si su sistema es de respuesta rápida como los servomecanismos o la planta de presión, deberá valerse de un osciloscopio que le permita almacenar la gráfica de la curva de respuesta; si es un sistema lento como el de temperatura, deberá registrar manualmente los cambios en la variable de salida a intervalos regulares de tiempo (algunos segundos) para hacer una gráfica punto a punto.▲

10. Determine si su sistema tiene tiempos muertos o histéresis.
11. Identifique el tipo de sistema al cual corresponde la curva de respuesta. Halle el valor de la ganancia del sistema.
12. Mida los parámetros relevantes según el tipo de curva; por ejemplo, si es oscilatoria, mida el tiempo de pico, el sobreimpulso, entre otros. Si es monóto-

na, mida: τ , el tiempo muerto, entre otros. Con base en estos parámetros, halle un modelo experimental de la planta del proceso.

13. Con el modelo análogo obtenido, vaya a MATLAB® y confronte la respuesta al escalón obtenida en el laboratorio con la dada por el simulador. Repítalo para diferentes valores de entrada y ganancia.

Informe

Elabore su reporte donde, de forma estructurada, organizada y profesional, informe (se recomienda usar la plantilla sugerida en el Anexo II):

1. Datos experimentales tabulados.
2. Modelo estático: rangos de linealidad del sistema.
3. Gráfica de la respuesta al escalón.
4. Valores de los parámetros y modelo matemático experimental.
5. Gráficas de la simulación para diferentes valores de entrada y ganancia.
6. Observaciones y conclusiones.

Si el sistema tiene una zona de comportamiento lineal encuentre la ganancia en DC del sistema. Compárela con la pendiente de la gráfica de respuesta del sistema en dicha zona, ¿qué puede concluir de esta observación?