

CAOS

The future ain't what is used to be.

YOGI BERRA

Cuando en conversaciones cotidianas se habla de caos, generalmente se hace alusión a algo desordenado o estocástico¹⁷. No obstante, aquí “caos” es un término técnico con una definición formal que vamos a ver enseguida. Para hacer énfasis en la diferencia, cabe señalar también que hay quienes lo llaman “caos determinista” o “caos matemático”, queriendo así decir que no tiene que ver con lo estocástico. Es una buena idea aunque, para no hacer el texto muy pesado de leer, lo llamaremos simplemente “caos”.

En el mundo real vemos muchos fenómenos que exhiben comportamientos a veces ordenados y predecibles, a veces desordenados e impredecibles. Hay una amplia gama de estos comportamientos. Podemos ver cosas que crecen y decrecen, que se estancan, que repiten lo mismo una y otra vez, o que fluctúan de manera errática. Los fenómenos caóticos están entre medias de los completamente ordenados y los completamente estocásticos (Figura 57). Pero caos no es sinónimo de desorden, porque bajo la apariencia de una gran complejidad se esconde típicamente una ecuación o un modelo de

17 Recordemos que una secuencia de eventos es estocástica si no tiene ninguna causa y, por tanto, no se puede predecir. En computación se las suele llamar, erróneamente, secuencias aleatorias. Aleatorio es sinónimo de impredecible, que no se puede comprimir porque no tiene patrones subyacentes. La diferencia entre ambos conceptos es cuestión de matices, pero una secuencia como 1111111111111111 puede ser estocástica (si da la suerte que sale eso al lanzar repetidamente una moneda al aire), pero definitivamente no es aleatoria ya que sí se puede comprimir.

comportamiento muy simple, cuya evolución en el tiempo es compleja. El caos es una forma barata de generar complejidad a partir de casi nada.

Es importante esclarecer esa diferencia entre procesos caóticos y estocásticos, especialmente porque en muchos textos se les confunde. En la tabla 3 vemos algunos ejemplos que nos ayudarán a entender las diferencias.

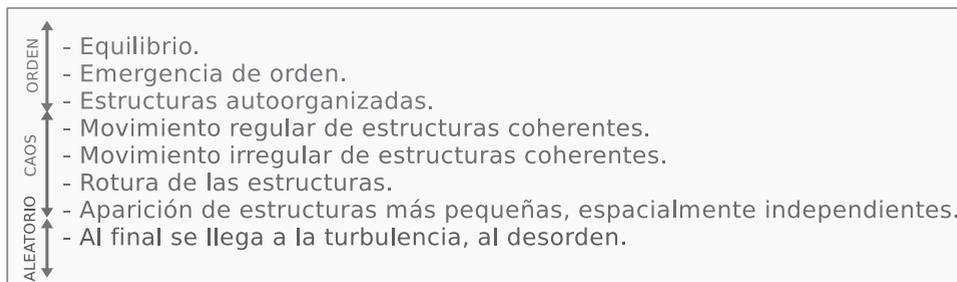


Figura 57. Transiciones del orden a la aleatoriedad pasando por el caos

Tabla 3. Comparación entre sistemas ordenado, caótico y estocástico

Característica	Orden	Caos	Estocástico
Ejemplo	Reloj	Nubes, clima	"Nieve" en un televisor sintonizado donde no hay canales
Predecibilidad	Muy alta	Finita, a corto plazo	Ninguna
Efecto de perturbarlo	Pequeño	Explosivo	Ninguno
Espectro	Armónico	Finito continuo	Muy ancho
Dimensión	Finita	Baja	Infinita
Control	Fácil	Difícil, pero efectivo	Imposible
Atractor	Punto, línea, toro...	Fractal	Ninguno

Y hay otro concepto adicional a considerar: la pseudoaleatoriedad, que es muy parecida al caos. Entonces los eventos del mundo pueden ser (Figura 58):

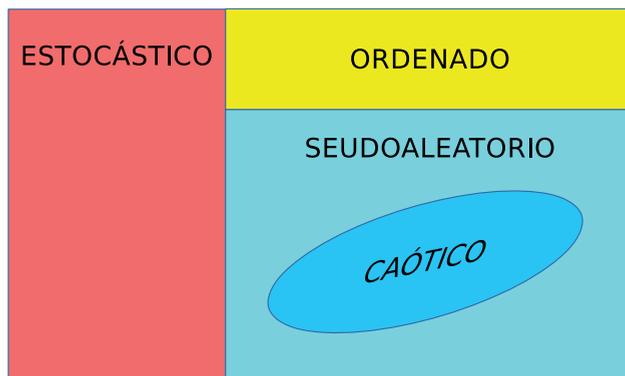


Figura 58. El mundo y sus causas

- Estocásticos: si no tienen ninguna causa. No hay ningún algoritmo que genere los resultados, que aparecen al azar.
- Ordenados: si la causa es fácilmente entendible y el resultado es predecible y repetible. El algoritmo que convierte causas en resultados se conoce o puede llegar a conocerse con facilidad. Y es determinista, es decir, no interviene el azar.
- Seudoaleatorios: si la causa no es fácilmente entendible, y el resultado es repetible solo si se conocen exactamente las causas (condiciones iniciales). El algoritmo que convierte causas en resultados existe y es determinista, pero probablemente no se conozca.
- Caóticos: si son seudoaleatorios y además cumplen otras tres condiciones que veremos enseguida: sensibilidad, densidad y mezcla.

Para complicar las cosas, puede haber eventos compuestos de varios de los anteriores.

Los fenómenos estocásticos son no deterministas, lo cual significa que ocurren sin que haya otro fenómeno desencadenante. Ocurren sin causa, al azar, de forma impredecible.

Los fenómenos ordenados, caóticos y seudoaleatorios son deterministas, es decir, hay una causa desencadenante fija tal que si repetimos las mismas condiciones iniciales se volverá a repetir el mismo fenómeno. La diferencia entre ellos es que en los ordenados la causa es conocida, fácil de entender y de predecir, mientras que en los otros dos no es así. Lo cierto es que si desconocemos el algoritmo que genera una secuencia seudoaleatoria, ella se comporta prácticamente igual que una secuencia estocástica.

Una pregunta filosófica importante: ¿existe realmente algún fenómeno estocástico? ¿O solo es nuestro desconocimiento el que los clasifica así? Después de todo, hace cientos de miles de años la salida del sol o los eclipses eran acontecimientos mágicos que, con el tiempo, fueron convirtiéndose en fenómenos ordenados (primero la salida del sol y mucho más tarde los eclipses), pues ese es el objetivo de la ciencia: convertir lo que parece estocástico en algo entendible y predecible.

Hoy en día se piensa que los únicos fenómenos verdaderamente estocásticos son los de la física cuántica. Sin embargo, también hay quienes creen lo contrario, es decir, que detrás de ellos hay fenómenos deterministas, según la teoría de las variables ocultas de David Bohm y otros. Los experimentos realizados en años recientes sobre la desigualdad de Bell han demostrado que no existen esas variables ocultas, pero incluso así aún queda otra posi-

bilidad: que las variables ocultas sean caóticas¹⁸ y no exista nada verdaderamente estocástico. De modo que la pregunta sigue abierta.

Por otro lado, esta discusión es muy similar a la que damos en el capítulo sobre la libertad, del siguiente libro: ¿somos libres? No lo sabemos y no importa. Nos basta una definición relativa de libertad. Y aquí, en el tema del orden y del desorden, nos basta una definición relativa de predictibilidad.

De hecho, en ciencia deberíamos prescindir del concepto “estocástico” pues tiene algo de mágico. Veamos por qué: en un computador no hay forma de crear secuencias de números realmente estocásticas, a no ser que las traigamos desde fuera del sistema¹⁹. Si dentro del computador creamos un mundo virtual, pasará lo mismo: la única manera de que tenga secuencias estocásticas es si las inyectamos desde fuera. ¿Será que en nuestro mundo real pasa lo mismo y lo estocástico, o bien no existe, o bien es una primitiva (no derivable del resto de cosas), inyectada desde fuera?

Piense que no son solo unas condiciones arbitrarias iniciales dadas en el momento del *Big Bang*. Se requiere un flujo continuo de información procedente de fuera de este mundo cada vez que un átomo decide o no desintegrarse, cada vez que un gato de Schrödinger decide o no morir, cada vez que un electrón salta por efecto túnel en nuestro computador. Es una cantidad enorme de información que tendría que venir desde fuera del universo. No parece razonable.

De todos modos, nadie lo sabe, y en el capítulo “La gradualidad de la emergencia” del siguiente libro propongo otra alternativa, donde lo que creemos que es estocástico es la diferencia entre las percepciones de nuestro nivel y las reglas que realmente están trabajando en el nivel inferior.



Figura 59. Clases de fenómenos

¹⁸ Ver, por ejemplo, Thompson (2004).

¹⁹ En Linux existe el flujo `/dev/random` que se puede abrir y leer como si fuera un archivo y que contiene sucesos externos como la distancia temporal entre pulsaciones de teclas, los eventos de *mouse* y las llegadas de paquetes de red, que han sido filtrados para eliminar las partes redundantes. Este flujo de datos se puede considerar realmente estocástico.

Por todo ello, es más sensato pensar que no hay nada realmente estocástico, que todo es determinista (ordenado, caótico o pseudoaleatorio) y que los sucesos del mundo tienen un horizonte de predicción que será mayor o menor en función de la sensibilidad intrínseca del fenómeno a las condiciones iniciales y del grado de inteligencia que tenga el ente que está realizando la predicción (ver figura 59 y tabla 4).

Conforme pasa el tiempo, los fenómenos que eran inicialmente percibidos como estocásticos, la ciencia los convierte en deterministas.

Tabla 4. Epistemología del determinismo

Nuestro conocimiento		Horizonte de predicción de fenómenos		
Fórmula o modelo de comportamiento	Estado inicial (con ruido)	Seudoaleatorios	Caóticos	Ordenados
Desconocido	Desconocido	nulo	nulo	nulo
Desconocido	Conocido	nulo	pequeño	grande
Conocido	Desconocido	nulo	pequeño	grande
Conocido	Conocido	nulo	grande	perfecto

Lo que el físico Eugene Wigner llama “la increíble efectividad de las matemáticas para entender el mundo”, es solo una ilusión. Las matemáticas nos dan un conocimiento perfecto cuando sabemos la fórmula y el estado inicial de un fenómeno ordenado. En los demás casos tenemos apenas aproximaciones.

El estado inicial hay que considerarlo siempre con ruido, es decir, errores en la medición. Pero si no tuviera absolutamente nada de ruido (por ejemplo, dentro de un computador), entonces con conocimiento perfecto (última fila) tendríamos predicciones perfectas para todos los fenómenos.

En este sentido, los fenómenos pseudoaleatorios también podríamos llamarlos “fenómenos criptográficos”, pues solo el conocimiento perfecto de todo nos permite entenderlos. Por ejemplo, cuando estamos tratando de averiguar una contraseña, si no la conocemos perfectamente —esto es, si conocemos todas las letras menos una—, no hay nada que hacer; no obtenemos acceso al sistema.

A continuación veremos cómo pueden ocurrir fenómenos deterministas en los que, a pesar de conocerse muy bien todos sus detalles, es imposible hacer predicciones a largo plazo en ellos. Son los fenómenos caóticos.

UN SISTEMA CAÓTICO MUY SENCILLO: LA CURVA LOGÍSTICA

Para que haya caos en un sistema es condición necesaria que exista al menos una realimentación positiva y una negativa. Y la forma más sencilla de obte-

ner caos es usar ecuaciones que se aplican iterativamente. Es decir, dada $f(x)$ y un valor inicial x_0 , aplicar:

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{Ec. 12}$$

O, dicho de otra manera, observar la sucesión

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), f(f(f(f(x_0)))) \dots \tag{Ec. 13}$$

Con el objetivo de ver si surge algún patrón interesante. Por ejemplo, si $f(x)=x^3$, el resultado de aplicar iterativamente $f(x)$ converge a cero o a infinito, dependiendo de la semilla, pues solo hay una realimentación positiva. Ello no es especialmente interesante. Pero podemos hacernos ciertas preguntas que sí lo son:

- ¿Existe una $p(x)$ tal que $p(p(x)) = -x$ para todo x ?
- ¿Existe una $q(x)$ tal que $q(q(x))=1/x$ para todo x ?

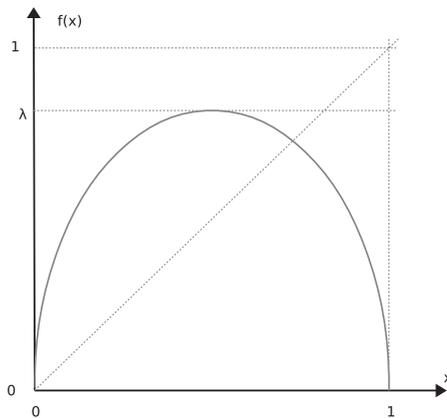


Figura 60. Curva logística

Si existieran, ambas tendrían periodo 4. Y nos podemos preguntar en general, ¿qué tipo de funciones exhibirían comportamientos cíclicos? Desde luego, no las que son monótonas, como x^3 . Para que aparezcan comportamientos cíclicos se necesita una función no lineal, que crezca en algún tramo y que decrezca en otro. Por ejemplo, investiguemos la siguiente parábola (Figura 60), conocida también como ecuación logística:

$$f(x) = 4 \lambda x (1-x) \tag{Ec. 14}$$

Esta ecuación tiene un parámetro lambda (λ) ajustable entre 0 y 1. El origen de la ecuación viene de modelar el crecimiento de una población de

animales que se reproducen a una tasa constante, pero que necesitan unos recursos para sobrevivir, y esos recursos son limitados.

Podemos considerar que hay dos bucles de realimentación (Figura 61) actuando sobre la variable x (el tamaño de la población). Por un lado, hay una realimentación positiva cuando la población es pequeña: el crecimiento es exponencial debido a la tasa constante de reproducción. Inicialmente habrá una pareja; cuando se reproduzcan y tengan 2 crías, entonces habrá 2 parejas; cuando se reproduzcan esas 2 parejas habrá 4 parejas; luego 8, y así sucesivamente. Esto se modela con el término x . Por otro lado, hay una realimentación negativa cuando la población es grande: el término $(1-x)$ expresa que hay límites al crecimiento, esto es, que cuanto más se acerque la población a 1, el factor $(1-x)$ tenderá a 0, haciendo que la población disminuya por falta de recursos.

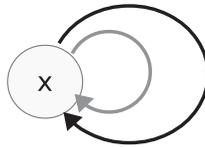


Figura 61. Bucles de realimentación en la ecuación logística
(gris, positivo; negro, negativo)

La ganancia de cada bucle no es constante, pues depende del tamaño de la población. Esto significa que habrá valores para los que predomine la realimentación positiva o la negativa o que ambos bucles se cancelen entre sí. Ello sugiere que el comportamiento de esta ecuación va a ser bastante sofisticado. Veámoslo. La ecuación discretizada queda:

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n (1-x_n) \quad \text{Ec. 15}$$

Vamos a explorar esta ecuación con valores iniciales (o sea, la semilla) de x entre $0 \leq x \leq 1$ y valores de lambda entre $0 \leq \lambda \leq 1$. Esto es muy fácil de implementar usando una hoja de cálculo²⁰ o también gráficamente. Para cada valor de lambda vamos a ver unos patrones distintos que pueden exhibir un comportamiento periódico o caótico. Hay quien suele imaginar ese lambda como si fuera el dial de un sintonizador de radio con el que se capturan distintas emisoras, en este caso, distintos comportamientos del sistema. Aunque la verdad es que lambda está relacionado con la ganancia de ambos bucles de realimentación.

²⁰ Ver: <https://goo.gl/4yE2TG>

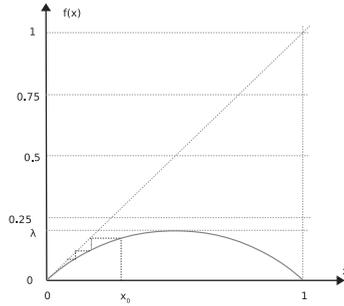


Figura 62. Curva logística con $\lambda < 0.25$

Para valores de lambda pequeños (Figura 62), concretamente con $\lambda < 0.25$, el resultado final tiende a 0, independientemente del valor semilla inicial de x , como se ve en la figura 63. Gráficamente, lo que se hace en la figura 62 es subir verticalmente desde x_0 hasta la curva $f(x)$, de allí se proyecta al nuevo valor de x , horizontalmente hasta la diagonal, y desde allí verticalmente hasta la curva, repitiéndose todas las veces que se quiera.

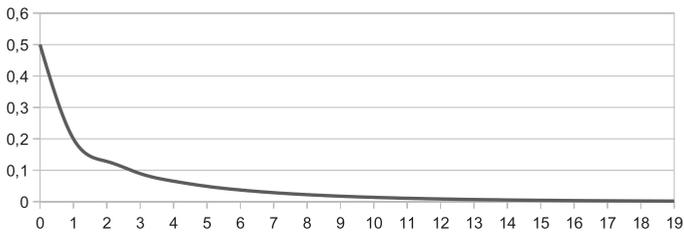


Figura 63. Serie temporal de la curva logística con $x_0 = 0.5$ y $\lambda = 0.2$

Pero si aumentamos λ un poco por encima de 0.25, el valor final (A_1) es distinto a 0 como puede verse en las figuras 64, 65 y 66.

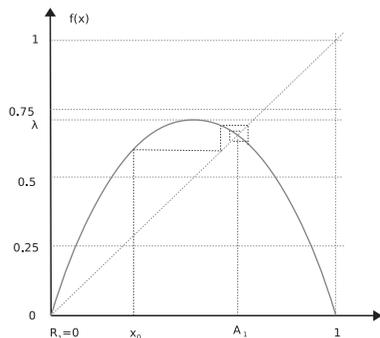


Figura 64. Curva logística para $0.25 < \lambda < 0.75$

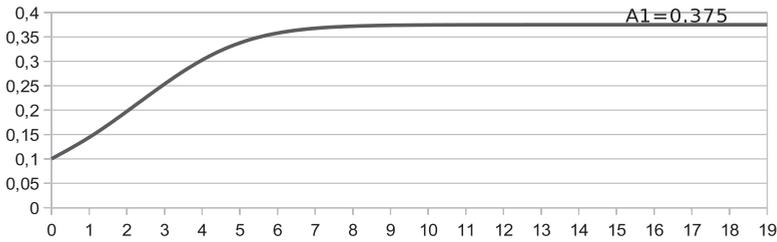


Figura 65. Serie temporal de la curva logística con $x_0=0.1$ y $\lambda=0.4$

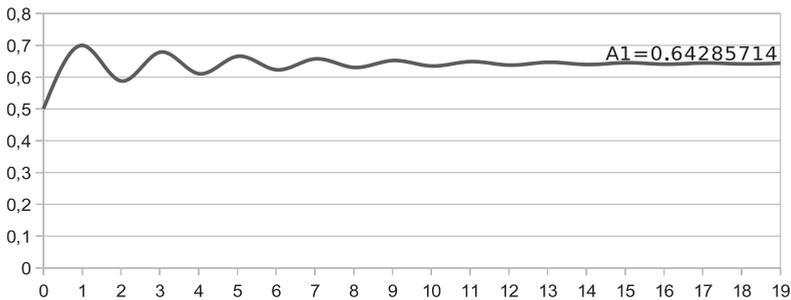


Figura 66. Serie temporal de la curva logística con $x_0=0.5$ y $\lambda=0.7$

El valor final A_1 se llama atractor porque es a donde se tiende para un conjunto amplio de valores iniciales de x_0 . Y se llama cuenca de atracción de A_1 precisamente a todos esos valores iniciales x_0 . Esta curva tiene otro atractor $A_2=0$ cuya cuenca de atracción es únicamente el punto $x_0=0$. De hecho, si la semilla inicial se aleja ligeramente de 0, se salta al otro atractor. Por ello, a $x_0=0$ no se le llama atractor sino repulsor (cualquier punto ligeramente alejado de él, se irá alejando más con cada iteración). Resumiendo, para $\lambda < 0.25$ hay un único atractor $A_1=0$ cuya cuenca de atracción son todos los puntos $0 \leq x_0 \leq 1$. Mientras que para $0.25 < \lambda < 0.75$ hay dos atractores, uno A_1 cuyo valor exacto depende de λ y está situado en la intersección de la diagonal con la curva, es decir, se puede calcular resolviendo $f(x)=x$, y cuya cuenca de atracción es $0 < x_0 \leq 1$; y otro que es repulsor $R_1=0$ cuya cuenca es únicamente el punto $x_0=0$.

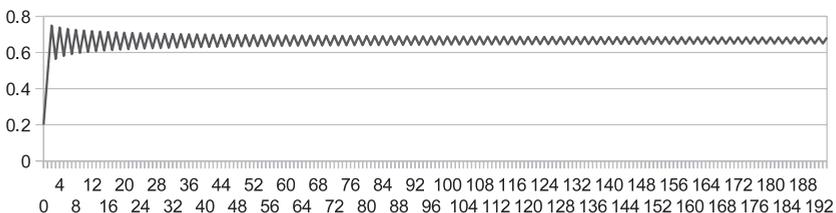


Figura 67. Serie temporal de la curva logística con $x_0=0.2$ y $\lambda=0.75$

Subimos lambda un poco más hasta llegar exactamente a 0.75. En ese momento las oscilaciones se demoran muchísimo en amortiguarse para estabilizarse en un único punto (Figura 67). De hecho, aunque disminuyen su amplitud, lo hacen asintóticamente hacia el atractor 0.666 conforme el tiempo tiende a infinito. Si seguimos subiendo el valor de lambda, cuando está un poco por encima de 0.75 el atractor A_1 se desdobra en dos: A_1 y A_2 . Es decir, la serie temporal oscila entre esos dos valores, como se observa en las figuras 68 y 69. Se dice que el atractor no es ya un punto, sino una órbita de dos puntos, o también, una órbita de periodo 2.

Si seguimos aumentando el valor de lambda, el periodo pasa a ser 4 (Figura 70), luego 8, y así cada vez más rápido, hasta que llega un momento en que aparece el caos, donde ya no es posible identificar un periodo de repetición de la onda temporal (Figura 71). Allí se pueden observar cuatro periodos que se parecen, aunque no son exactamente iguales. En la figura 72 se ve una secuencia más larga de la misma onda, donde se aprecia con más claridad que no se repite.

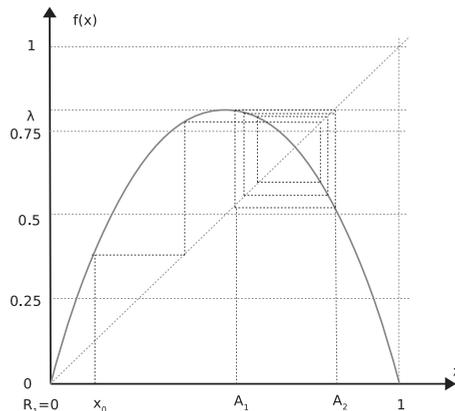


Figura 68. Curva logística para $x_0=0.2$ y $\lambda=0.8$

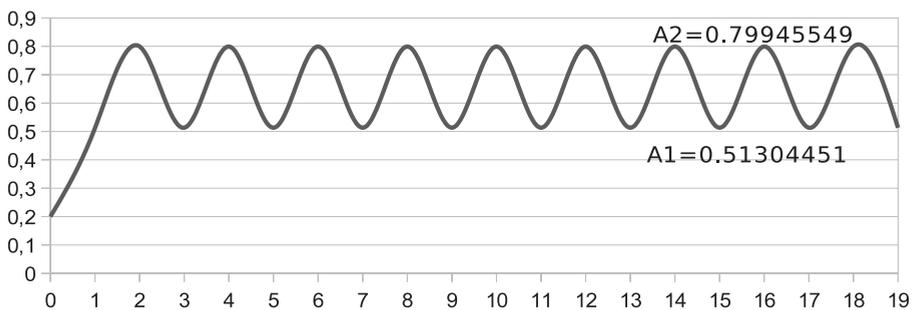


Figura 69. Serie temporal de la curva logística con $x_0=0.2$ y $\lambda=0.8$, de periodo 2

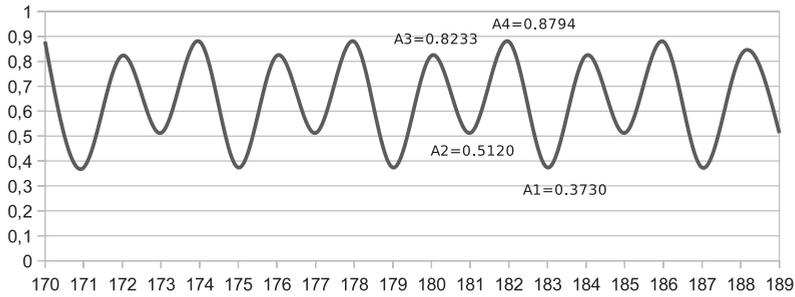


Figura 70. Serie temporal de la curva logística con $x_0=0.2$ y $\lambda=0.88$, de periodo 4

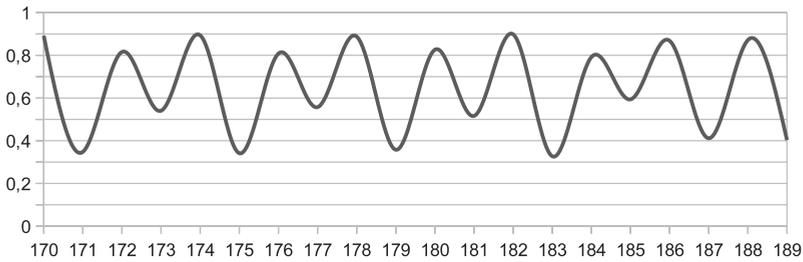


Figura 71. Curva logística en zona caótica para $\lambda=0.95$

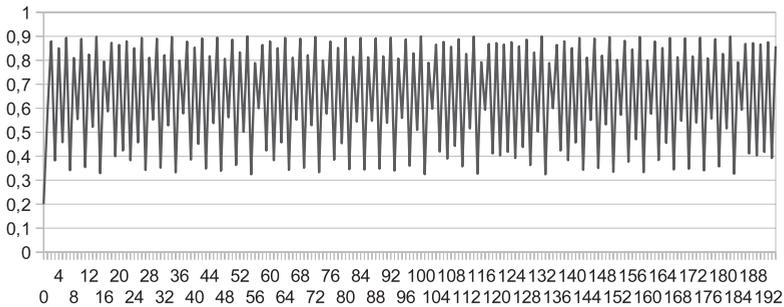


Figura 72. Una serie más larga de la misma ecuación anterior

Esta es una de las características de los fenómenos caóticos: parece que hay una estructura periódica, pero cuando te fijas bien, te das cuenta que no es así. La onda es aperiódica o, si se quiere, de periodo infinito. Este es un primer obstáculo que impide predecir futuros valores de la secuencia a partir de los valores pasados.

Una segunda característica de los fenómenos caóticos es su alta sensibilidad a los valores iniciales, lo que no ocurre con los fenómenos periódicos, como por ejemplo, un reloj. Si mi reloj lo pongo en hora hoy con un segundo de retraso, cuando mire la hora dentro de un año seguiré teniendo más o menos un segundo de retraso. Por el contrario, en los fenómenos caóticos una pequeña desviación en el valor inicial se traduce en un error que se am-

plifica exponencialmente conforme pasa el tiempo. En la figura 73 podemos ver la ecuación logística de nuevo con $\lambda=0.95$ pero para dos valores iniciales casi idénticos: en azul con una semilla inicial de $x_0=0.2$; y en rojo observamos la misma ecuación, pero ahora la semilla es $x_0=0.2001$, es decir, un error de una milésima.

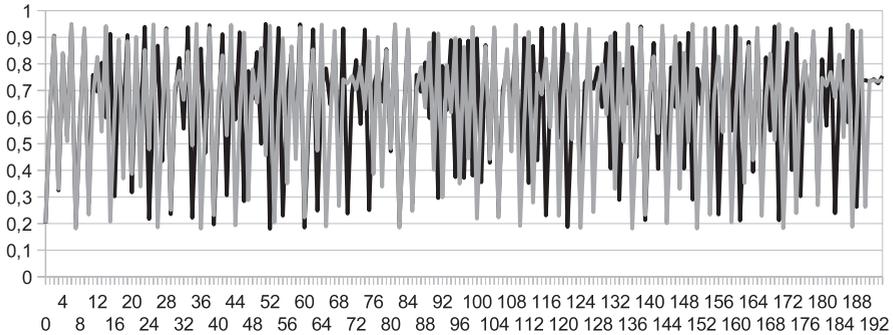


Figura 73. Curva logística en caos, con $\lambda=0.95$ para $x_0=0.2$ (en negro) y $x_0=0.2001$ (en gris)

Y en la figura 74 vemos un detalle ampliado de la misma onda. Como vemos, son bastante distintas. El error inicial se amplificó apreciablemente a partir de la muestra 11 (ver el inicio de la onda en la figura 75). Esto es lo que se llama el “horizonte de predicción”: hasta la muestra 11 es fácil predecir lo que va a pasar, pero a partir de ahí no, porque cualquier pequeño error en la medida del punto inicial se amplifica exponencialmente. En este ejemplo, el horizonte de predicción está en la muestra 11, pero con otras ecuaciones, otras semillas u otros valores de lambda, puede ser mayor o menor. Cuando hay caos, se puede predecir el resultado del sistema a corto plazo, pero no a largo plazo.

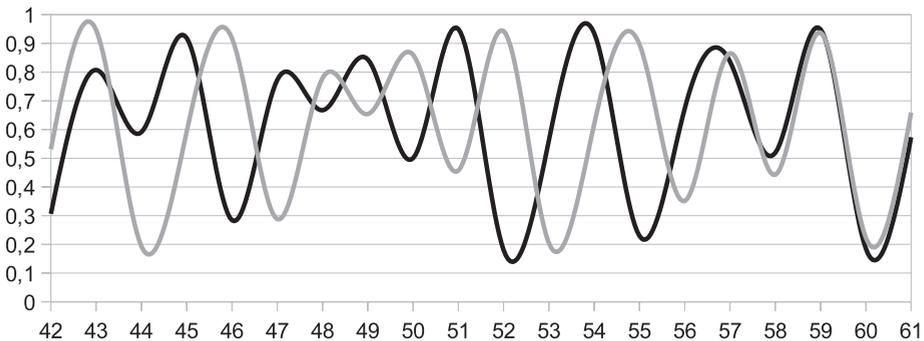


Figura 74. Detalle ampliado de la onda anterior

El concepto importante a recordar aquí es que el caos es un fenómeno determinista, o sea, la ecuación no incluye ningún parámetro desconocido o estocástico. A pesar de ello, la salida del sistema a largo plazo no se puede predecir, salvo que se tenga un sistema aislado, sin ruidos ni errores en las medidas, lo cual es imposible en la práctica.

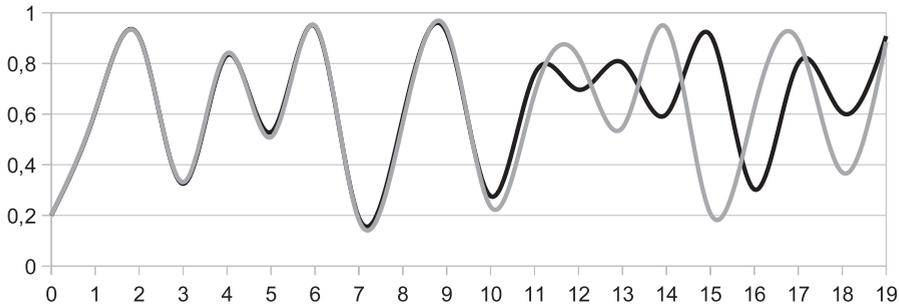


Figura 75. Inicio de la onda de la figura anterior, donde se aprecia el momento en que se produce la divergencia

Volviendo al parámetro lambda, la primera duplicación de periodo ocurre cuando $\lambda=0.75$ y la segunda para $\lambda=0.86237$. Podemos hacer gráficos con los valores de los atractores en función de lambda y obtendremos algo similar a la figura 76.

λ	Periodo	Atractor
0.7	1	0 0.25 0.5 0.75 1
0.8	2	0 0.25 0.5 0.75 1
0.88	4	0 0.25 0.5 0.75 1
0.9	8	0 0.25 0.5 0.75 1
	16	0 0.25 0.5 0.75 1
	32	0 0.25 0.5 0.75 1

Figura 76. Duplicación de periodo en la curva logística

Observemos que hay una cierta autosemejanza al pasar, por ejemplo, de periodo 16 a 32, si comparamos los atractores encerrados en los rectángulos verdes. De hecho, el conjunto de todos los atractores cuando variamos

λ de manera continua es un fractal, como se ve en la figura 77, donde es posible averiguar para cada valor de λ cuál es el periodo de la órbita que se genera. Por ejemplo, para $\lambda=0.4$ solo hay un punto de la curva, por lo que el periodo es 1.

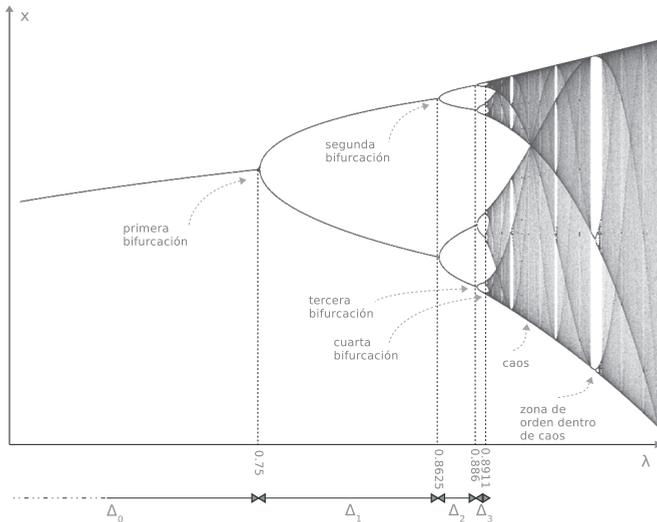


Figura 77. Diagrama de bifurcación de la curva logística

Fuente: original por Ríos (2013), modificada por el autor

Y vemos cómo ocurre la primera duplicación de periodo (la primera bifurcación) en $\lambda=0.75$. Un poco después aparece la segunda duplicación de periodo, y así cada vez más rápidamente, produciéndose una cascada de duplicaciones que termina en la zona de caos, donde se confunden unas bifurcaciones con otras. A ello se le llama “crisis”, según las definiciones presentadas más adelante. También puede observarse cómo, dentro de las zonas de confusión (donde hay caos), hay estrechas franjas verticales donde el sistema vuelve a ser periódico (es decir, ordenado). Y si aumentásemos más esas franjas veríamos que hay subfranjas mucho más estrechas donde vuelve a aparecer el caos. Es decir, hay zonas ordenadas dentro de las caóticas y zonas caóticas dentro de las ordenadas. Y la más mínima perturbación puede llevar el sistema de una a otra. El sistema es autosimilar cuando se hace *zoom* sobre él.

Además, la cascada de bifurcaciones ocurre cada vez más rápido y si miramos cómo se acelera obtenemos lo siguiente:

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{(0.75-0)}{(0.8625)-(0.75)} = 6.666 \quad \text{Ec. 16}$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{(0.8625 - 0.75)}{(0.886 - 0.8625)} = 4.787 \quad \text{Ec. 17}$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{(0.886 - 0.8625)}{(0.8911 - 0.886)} = 4.608 \quad \text{Ec. 18}$$

Y en el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = 4.6692016... \quad \text{Ec. 19}$$

Que es irracional y se le llama número de Feigenbaum, en honor a su descubridor. Es interesante hacer notar que estas ecuaciones se aplican a muchas funciones $f(x)$ no necesariamente parábolas, pues basta con que tengan un único valor máximo en el intervalo $[0,1]$. A esto se le denomina universalidad.

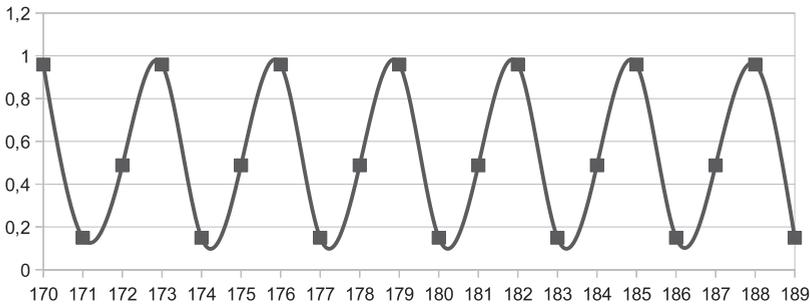


Figura 78. Curva logística con periodo 3 para $\lambda=0.96$

También es interesante ver que en las zonas donde hay mezcla de órbitas (en la figura 77) pueden aparecer periodos que no son múltiplos de 2. Por ejemplo, para $\lambda=0.96$ el periodo es 3 (ver la correspondiente secuencia en el tiempo en la figura 78). Y a ello le siguen sucesivas duplicaciones de periodo (6, 12...).

En 1975, Li y Yorke ya habían demostrado que una función iterativa de periodo 3 implicaba caos. Efectivamente, así vemos que ocurre con la función logística.

Si realizamos un histograma de los valores temporales que va tomando la curva logística, vemos que no son equiprobables. Eso significa que aunque no podemos predecir el futuro puntualmente, si lo podemos hacer estadísticamente. En la figura 79 vemos un histograma para $\lambda=1$, donde la ecuación logística también es caótica: los valores extremos (muy alto y muy bajo) son

muy probables, mientras que los valores medios no lo son. Es por eso que el clima se puede predecir en detalle (cuántos litros lloverá, la nubosidad, la fuerza del viento) hasta solo unos pocos días por adelantado, pero nada impide hacer predicciones estadísticas generales de más largo plazo (por ejemplo, si la próxima primavera va a ser muy lluviosa o no).

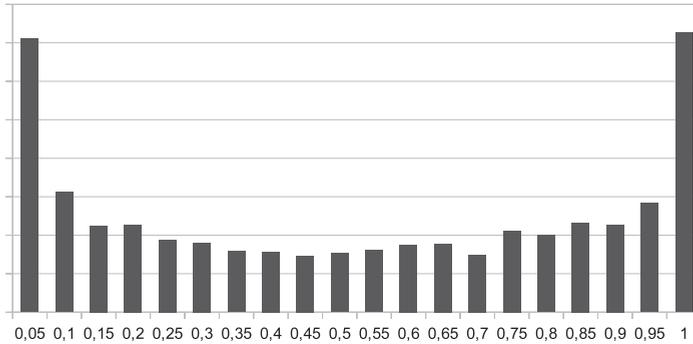


Figura 79. Histograma de valores temporales de la curva logística, de 0 a 1 con anchura 0.05

OTROS SISTEMAS QUE EXHIBEN CAOS

Se pueden proponer más ejemplos de ecuaciones deterministas que llevan al caos al dar ciertos valores a sus parámetros:

Sistema de Lorenz

Son ecuaciones diferenciales que modelan el clima:

$$\begin{aligned} \frac{d x}{d t} &= \delta (y-x) \\ \frac{d y}{d t} &= \alpha x - y - x z \\ \frac{d z}{d t} &= x y - \beta z \end{aligned} \quad \text{Ec. 20}$$

Son tres variables de estado $\{x, y, z\}$ y tres parámetros de control $\{\delta, \alpha, \beta\}$. En la figura 81 puede verse el diagrama de bifurcaciones y en la figura 80 uno de los atractores (para $\delta=10, \alpha=28, \beta=8/3$), muy conocido por su parecido con las alas de una mariposa. Es importante hacer notar que en este atractor no se cruzan las órbitas (tal y como se comenta más adelante, en la figura 92), como podría aparentar, pues la figura tiene tres dimensiones.

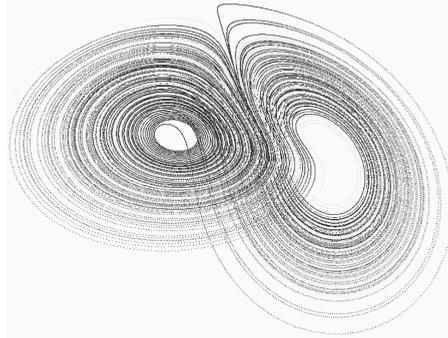


Figura 80. Atractor de Lorenz (ocupa 3 dimensiones) para $\delta=10$, $\alpha=28$, $\beta=8/3$

Fuente: Ríos, 2013

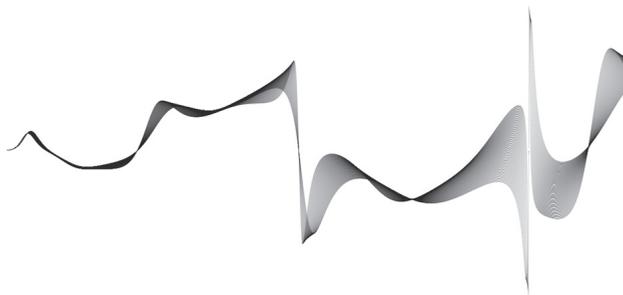
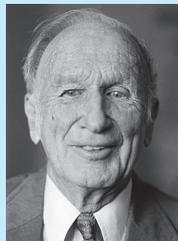


Figura 81. Diagrama de bifurcaciones de Lorenz (en abscisas, el parámetro α ; en ordenadas, la variable de estado x)

Fuente: Ríos, 2013



Personaje 2

Edward Lorenz (1917-2008)

Fuente: EFE

Edward Norton Lorenz fue un meteorólogo y matemático estadounidense que descubrió por casualidad el fenómeno de la alta sensibilidad a las condiciones iniciales presente en los procesos caóticos. La historia es más o menos así: estaba haciendo una simulación con su modelo de tres ecuaciones para el clima. Los computadores de aquella época eran lentos por lo que iba imprimiendo resultados parciales conforme avanzaba la simulación. En un momento dado, Lorenz detuvo la simulación. Cuando la reanudó lo hizo introduciendo como datos de entrada unos resultados parciales que obtuvo, pero no se molestó en teclear todas las cifras decimales. Y lo que obtuvo le asombró: los cálculos divergían rápidamente de los valores que estaba obteniendo antes.

Mapa de Hénon

Es una sección de Poincaré de las ecuaciones de Lorenz, que diseñó Michael Hénon con el objetivo de obtener caos en un sistema más sencillo (Figura 82). El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n - ax_n^2 + 1 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \quad \text{Ec. 21}$$

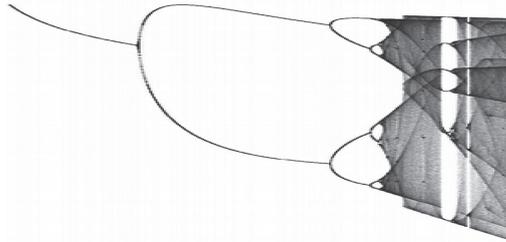


Figura 82. Diagrama de bifurcaciones de Hénon (en abscisas, el parámetro a ; en ordenadas, la variable de estado x)

Fuente: Ríos, 2013

Obsérvese que solo tiene dos variables de estado $\{x,y\}$ y dos parámetros $\{a,b\}$. Para algunos valores de $\{a,b\}$ se obtiene caos y para otros órbitas periódicas. Por ejemplo, se obtiene caos para $a=1.4$ y $b=0.3$ (Figura 83), que se llama el sistema clásico de Hénon. Es complicado dibujar un gráfico con tantas variables y parámetros, por lo que se opta por mantener un parámetro constante y variar el otro, dibujando solo una de las variables de estado (Figura 82).

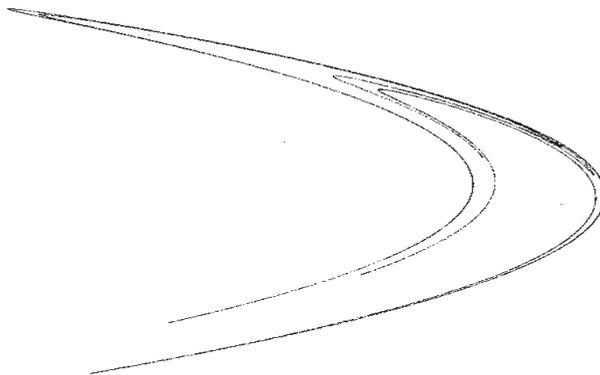


Figura 83. Uno de los atractores de Hénon para $a=1.4$, $b=0.3$

Fuente: Ríos, 2013

Sistema de Ikeda

Procede de un modelo de física de resonadores ópticos y consiste en las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a + b(\cos(u) x_n - \sin(u) y_n) \\y_{n+1} &= b(\sin(u) x_n + \cos(u) y_n)\end{aligned}\quad \text{Ec. 22}$$

siendo $u = c - \frac{d}{1 + x_n^2 + y_n^2}$

Aquí hay dos variables de estado $\{x, y\}$ y cuatro parámetros que controlan el comportamiento del sistema $\{a, b, c, d\}$. En la figura 84 puede verse el diagrama de bifurcaciones y en la figura 85 un atractor.

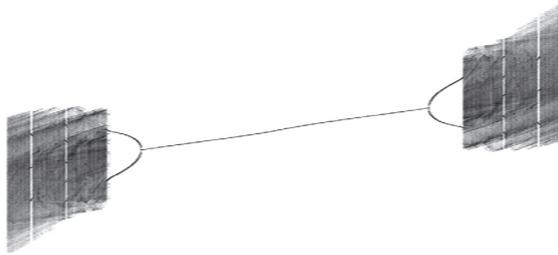


Figura 84. Diagrama de bifurcaciones de Ikeda (en abscisas el parámetro a ; en ordenadas la variable de estado x)

Fuente: Ríos, 2013



Figura 85. Un atractor de Ikeda para $a=1$, $b=0.9$, $c=0.4$, $d=6$

Fuente: Ríos, 2013

Se puede observar claramente la transición abrupta del caos al orden y luego del orden al caos, así como la mezcla de varios atractores en las zonas caóticas, que es un concepto llamado “crisis” (ver definiciones más adelante).

Sistema de Tinkerbell

Sus ecuaciones tienen dos variables de estado $\{x, y\}$ y cuatro parámetros $\{a, b, c, d\}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + ax_n + by_n \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + cx_n + dy_n \end{aligned} \quad \text{Ec. 23}$$

En la figura 86 vemos su diagrama de bifurcaciones y en la figura 87, un atractor.

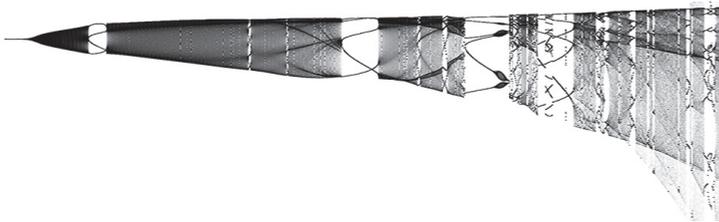


Figura 86. Diagrama de bifurcaciones de Tinkerbell

Fuente: Ríos, 2013

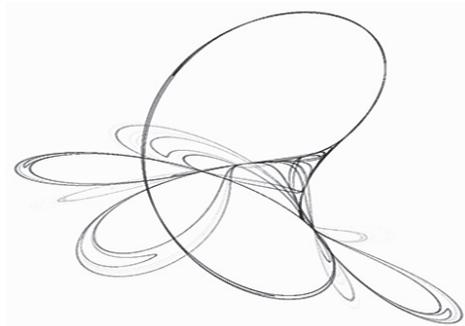


Figura 87. Atractor de Tinkerbell para $a=0.5, b=-0.6, c=2.2, d=0.5$

Fuente: Ríos, 2013

Los ejemplos anteriores son modelos matemáticos, pero también puede verse el caos en fenómenos físicos, como los siguientes.

Llave de agua goteando

Cuando se abre o se cierra muy despacio una llave de agua, hay un momento en que se pasa de un goteo periódico a uno caótico. La figura 88 muestra fotografías del lavaplatos de mi casa en las que las líneas de color verde indican dónde están las gotas de agua. En la foto (a) se observa el fenómeno de duplicación de periodo, mientras que en la foto (b) puede verse el caos:

se intuye que las gotas no son periódicas²¹, y si el experimento se prolonga durante bastante tiempo y se toman datos precisos se confirma que, efectivamente, no lo son.

Unos años más tarde cambié de casa y repetí el experimento, pero no logré obtener el régimen caótico. Para tratar de entender el asunto, hice pruebas con una manguera en el jardín, y allí sí se obtenía caos con facilidad. La razón de ello era que la nueva casa tenía mejores materiales y la tubería de la cocina que termina en la llave no vibra cuando pasa el agua por ella. Así logré confirmar un concepto importante sobre el caos: no se trata de un fenómeno mágico, ni de la “nueva era”. Tampoco ocurre obligatoriamente. Para que ocurra debe haber algún bucle de realimentación. En el caso de la casa vieja, cuando salía una gota, la tubería se desplazaba levemente hacia arriba, por la segunda ley de Newton, de acción y reacción. La tubería era flexible y podía hacerlo. Y esa vibración de la tubería era lo que volvía impredecible cuando iba a desprenderse la siguiente gota (Figura 89).

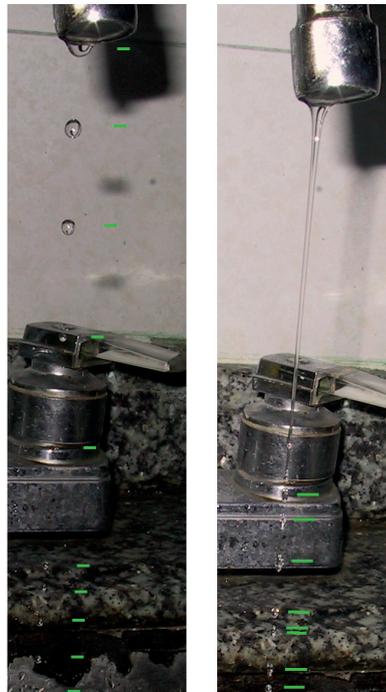


Figura 88. Caos en la cocina

21 Hay que tener en cuenta que no caen a velocidad constante sino a aceleración constante, por lo que es más preciso registrar el sonido que hacen al golpear el fondo del lavaplatos, y obtener así una secuencia temporal de eventos donde analizar la periodicidad. Pero, incluso así, las fotos dan una idea de lo que está ocurriendo.

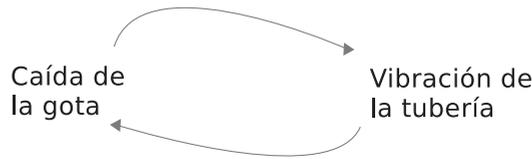


Figura 89. Bucle en llave de agua

Seguramente hay muchas otras formas de obtener caos en una llave que gotea agua, pero en todas debe existir algún tipo de bucle de realimentación. De hecho, se requieren al menos dos bucles: uno de realimentación positiva y otro de realimentación negativa.

Péndulo doble

Si a la masa oscilante de un péndulo se le sujeta otro péndulo, tenemos un péndulo doble (Figura 90). Jugando con las longitudes y las masas de cada péndulo obtenemos una variedad de fenómenos, incluyendo el caos.

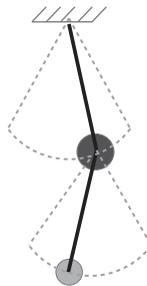


Figura 90. Péndulo doble

Péndulo con imanes

Hay varias formas de hacerlo, pero la idea es que en la masa de un péndulo se coloque un imán, y justo debajo en su vertical se coloque otro u otros (repeliendo o atrayendo al primero). De este modo, no hay una única fuerza actuando sobre el péndulo sino varias. De nuevo, jugando con los parámetros (número, situación y fuerza de los imanes), se puede obtener caos con facilidad. Se puede simular el fenómeno en el computador, introduciendo las ecuaciones de gravitación del péndulo y las de los imanes. Después de oscilar de forma errática, el péndulo terminará fijo, atraído hacia un único imán. Partiendo de posiciones iniciales ligeramente distintas, el péndulo termina en sitios muy distintos. Por ejemplo, en el video de Peitgen (2016) se ha realizado el experimento con tres imanes, marcados con colores rojo amarillo y azul, y se exploran muchos puntos donde se suelta el péndulo, marcándolos luego con el color del imán donde aterriza. Conforme se va

haciendo más fina la ubicación del punto inicial, la figura dibujada se va haciendo más enrevesada.

Sistemas fisiológicos

Muchos sistemas fisiológicos exhiben caos. Por ejemplo, el electrocardiograma de una persona sana puede parecer periódico, pero no lo es. Es caótico. Curiosamente, si exhibe una periodicidad exacta, entonces denota alguna enfermedad. Lo mismo ocurre con el electroencefalograma, que se vuelve periódico cuando el sujeto experimenta un ataque de epilepsia, cuando tiene Parkinson u sufre otras afecciones.

Esto debe ser motivo de reflexión: un sistema periódico y predecible no puede reaccionar rápidamente a alteraciones de su entorno. No se puede adaptar. Un sistema completamente aleatorio no puede tampoco reaccionar adecuadamente. Está continuamente reaccionando de forma desadaptativa ante cosas que no han ocurrido. Mientras que un sistema caótico conserva una libertad de elección que le permite reaccionar ante cambios repentinos, tomar decisiones y adaptarse a problemas que se le presenten. Rodolfo Llinás decía que el pequeño temblor que vemos en la punta de los dedos cuando extendemos la mano es el efecto residual del caos que reina en el cerebro y se transmite por los nervios a los músculos. Y también decía que ese es el movimiento más rápido que el cuerpo puede realizar. El caos nos da libertad, como argumentábamos al analizar los sistemas complejos. Por ello, es muy frecuente encontrar que los sistemas vivos se encuentren en caos, al borde entre el orden y el desorden²².

DEFINICIONES

A continuación vamos a dar unas cuantas definiciones que, aunque su origen es la teoría de control, a nosotros nos van a servir para entender mejor el caos.

Sistema dinámico: que cambia en el tiempo.

Estado: mínimo conjunto de variables que determinan el presente de un sistema. Si el sistema es determinista, en teoría también quedan determinados el pasado y el futuro. Por ejemplo, en un péndulo simple lo habitual es tomar como variables de estados su posición y su velocidad vectorial. En la práctica, dado que el péndulo es rígido, basta con la coordenada respecto al eje x (que

²² En muchos libros se dice “*at the edge of chaos*” y se traduce por “estar al borde del caos”, o sea casi en caos. Pero eso no es correcto. La traducción correcta sería “estar dentro del caos, que es una zona muy angosta, afilada, al borde entre el orden y el desorden”.

lo definimos como paralelo al movimiento) y la componente de la velocidad en ese eje x (con signo).

Dimensión: número de estas variables.

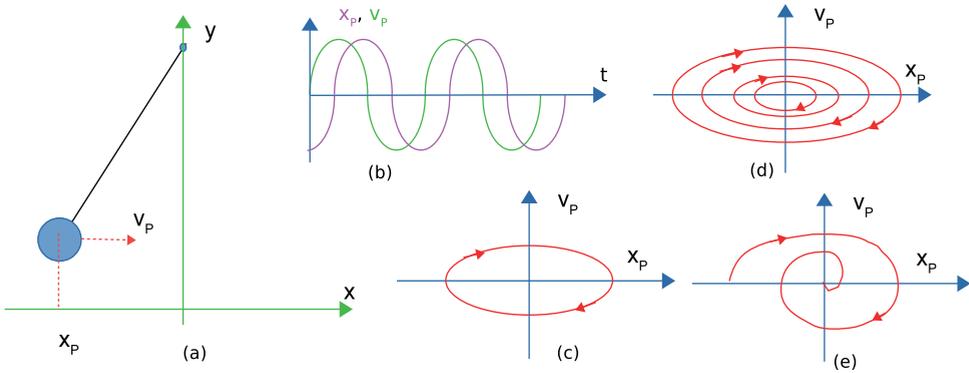


Figura 91. a) Péndulo con dos variables de estado; b) serie temporal de las dos variables; c) una órbita sin rozamiento; d) diagrama de estados, sin rozamiento; e) una órbita, con rozamiento

Diagrama de estados o espacio de fases: conjunto de órbitas de un sistema, para diversas condiciones iniciales. El diagrama de estados tiene un eje para cada variable de estado. Y el tiempo no figura explícitamente (Figura 91-d).

Órbita: trayectoria de estados por los que pasa un sistema conforme transcurre el tiempo (Figura 91-c y d). Si el volumen donde transcurren las órbitas se conserva (aunque cambie de forma), se trata de un sistema *hamiltoniano* (no-disipativo) como el de la figura 91-c. Si se contrae, se trata de un sistema disipativo, es decir, con rozamiento u otro tipo de pérdida de energía (Figura 91-e).

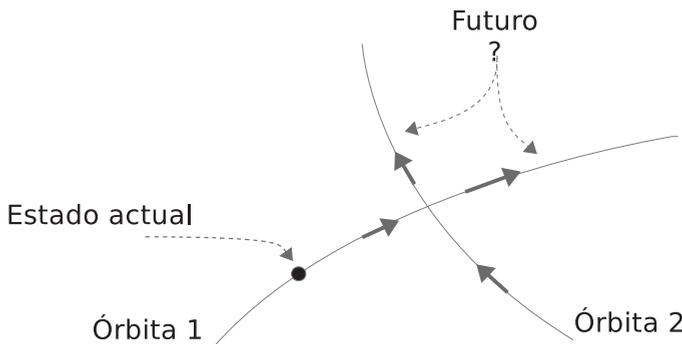


Figura 92. Explicación de por qué dos órbitas no pueden intersectarse

En un sistema determinista las órbitas no se pueden intersectar debido a la definición de estado. Entendamos bien la razón: si dos órbitas se intersecasen, a partir de ese punto tendrían dos futuros (Figura 92), lo cual es lógicamente imposible.

En sistemas continuos se requieren al menos 3 dimensiones para que pueda darse el caos (en 2 dimensiones las órbitas no pueden ser lo suficientemente complejas ya que, por definición, no pueden intersectarse con ellas mismas). Un ejemplo de ello es el atractor de Lorenz, que tiene 3 dimensiones.

En sistemas discretos puede darse el caos desde la primera dimensión, como hemos visto en la ecuación logística.

Atractores: órbitas límite a donde tienden todas las demás órbitas, conforme pasa el tiempo. En sistemas continuos de dimensión igual a dos, los atractores pueden ser:

- Punto fijo como, por ejemplo, un péndulo con rozamiento, que acabamos de ver en la figura 91-e.
- Periódico, como el péndulo sin rozamiento de la figura 91-c.
- Ciclo límite, al que las órbitas se van acercando más a medida que pasa el tiempo como, por ejemplo, para ciertos parámetros de las ecuaciones de Lotka-Volterra en modelos de predador-presa (Figura 93-a).

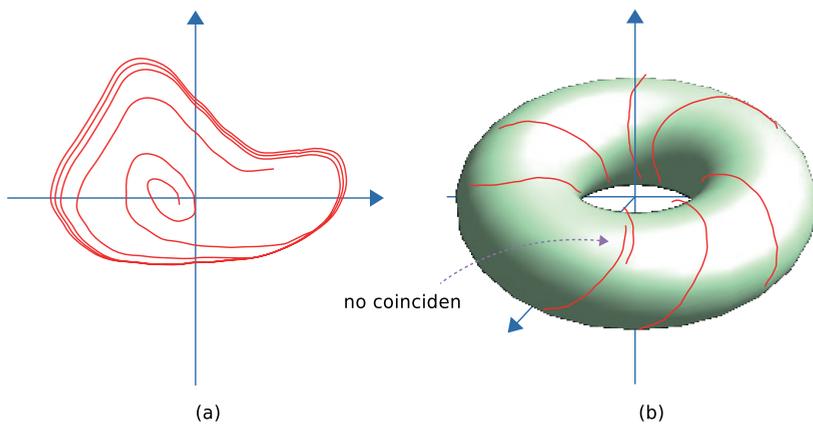


Figura 93. a) Ciclo límite; b) casi-periódico

- En sistemas continuos de dimensión mayor que dos también pueden darse “ciclos límite casi-periódicos”, donde cada variable de estado evoluciona de forma periódica, pero donde las relaciones entre los periodos son un número irracional, por lo que la órbita nunca se repite (Figura 93-b). Aun así, las trayectorias que parten de puntos cercanos no divergen, y ello indica que no se trata de caos. Por ejemplo, podemos pensar en una órbita que vaya enrollada sobre un toro: si la rela-

ción entre periodos es o cualquier otro número irracional, el estado jamás volverá a pasar por el mismo punto, aunque se aproximará tanto como se desee en las sucesivas vueltas.

- Y también pueden aparecer los “atractores caóticos” que son no-periódicos y que muestran sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales. Estos atractores fueron llamados históricamente “atractores extraños”. Pero para nosotros ya no son tan extraños: son fractales²³, como los vistos en el capítulo anterior. Y es condición necesaria²⁴ para que haya caos, que su atractor sea un fractal.

Cuencas de atracción: es la misma idea que los atractores, pero se hace énfasis en que hay unas condiciones iniciales que llevan hacia un atractor. A ese conjunto de condiciones iniciales se les llama cuenca de tal atractor. Cada atractor tiene su cuenca de atracción. Los repulsores, por el contrario, no la tienen. Si imaginamos que el estado es como una bolita que puede rodar por la montaña, las cuencas de atracción son los valles, y el atractor es el punto final de reposo (Figura 94).

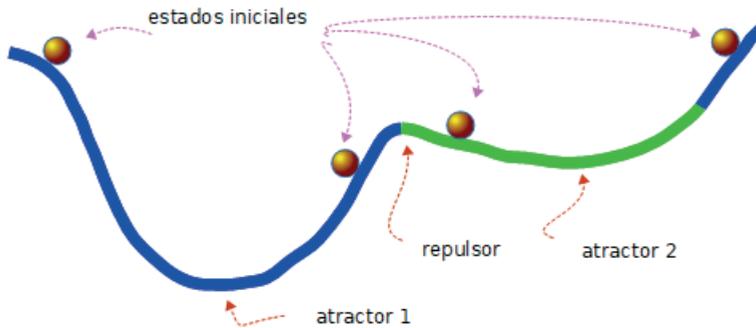


Figura 94. Atractor 1 y su cuenca de atracción en color azul; atractor 2 y su cuenca de atracción en color verde

Por último, la definición principal que nos ocupa:

Caos: para que un sistema esté en régimen caótico debe cumplir las tres condiciones siguientes (Martín, Morán y Reyes, 1998):

23 Aunque conviene advertir que hay otros investigadores que definen los atractores extraños como curvas no diferenciables.

24 No es una condición suficiente porque se han descubierto algunos casos de atractores fractales en sistemas dinámicos con coeficiente de Lyapunov negativo o cero, es decir, que no son exponencialmente sensibles a las condiciones iniciales (Grebogi 1984).

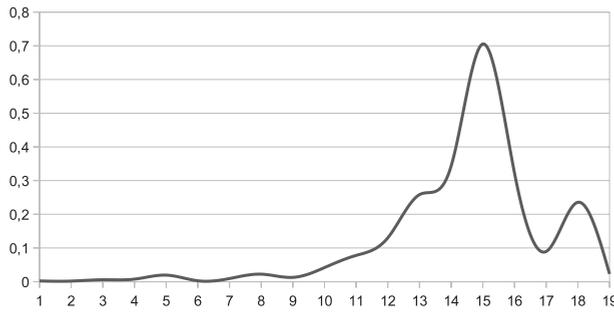


Figura 95. El valor absoluto del error crece exponencialmente

Debe ser exponencialmente sensible a las condiciones iniciales. Esto es, si tenemos dos órbitas con condiciones iniciales casi idénticas, esa pequeña diferencia debe amplificarse proporcionalmente a $e^{\lambda \Delta t}$, donde Δt es un pequeño incremento de tiempo y λ es el llamado coeficiente de Lyapunov, que debe ser positivo para que haya caos. Esto solo interesa para Δt pequeños, ya que la variable de salida está acotada y no va a crecer exponencialmente. En la figura 95 podemos ver la diferencia en valor absoluto de las dos curvas de la figura 75: inicialmente el crecimiento de la diferencia entre dos órbitas es exponencial, hasta que se satura al valor máximo o mínimo posible que, en este caso, ocurre para $t=15$.

- Debe haber mezcla topológica de las órbitas, es decir, cualquier subconjunto de su órbita se puede transformar en cualquier otro subconjunto, si transcurre suficiente tiempo.
- Sus órbitas periódicas deben ser densas. También se formula como que su espacio de fases debe ser compacto. Y ello significa que cada punto del atractor caótico está infinitamente próximo a algún punto de una órbita periódica, de modo que la más mínima perturbación cambia el sistema de periódico a caótico y viceversa.

En muchos libros antiguos solo se menciona la primera de ellas, que es además la más popular gracias a un comentario de Lorenz en un congreso. Algo así como: “el batir de alas de una mariposa en Cali puede desencadenar un tornado en Malpelo”. Esta frase, que es muy evocativa y que ha servido hasta para dar título a películas de cine, hoy se usa exactamente al revés. Dado que cualquier fenómeno que estudiemos puede ser caótico (como el clima), para lograr predicciones más robustas se usan varios modelos y con condiciones iniciales ligeramente distintas a las medidas. Si todos los modelos predicen más o menos lo mismo, tenemos una buena probabilidad de acertar, mientras que si divergen fuertemente quiere decir que hemos entrado en zona caótica y es mejor no arriesgarse en apuestas. Por ejemplo, para

predecir si un asteroide impactará sobre la Tierra, se usa el modelo estándar de gravedad *newtoniana* con las coordenadas iniciales y velocidades medidas de todos los cuerpos involucrados. Pero se corre el modelo muchísimas veces, y cada vez se le suma ruido a esas coordenadas y velocidades, tratando de modelar la imprecisión de las medidas. El conteo de las ejecuciones en las cuales el asteroide impacta frente al número total de ejecuciones nos da la probabilidad de que ese evento realmente ocurra.

O si se va a realizar una inversión de dinero en la bolsa (que ya se sabe que su comportamiento es caótico), primero se analizan varios modelos con ruido en las condiciones iniciales, y se espera el momento propicio para hacerla cuando la sensibilidad al ruido sea mínima.

Por supuesto, también se puede hacer al revés: si uno desea incertidumbre, creatividad y sorpresa, debe realizar cambios en su sistema caótico cuando la sensibilidad al ruido sea máxima.

Otras definiciones interesantes:

Crisis: cuando un atractor fractal aparece o desaparece bruscamente (y se convierte a un atractor no fractal), o cuando se mezcla bruscamente con otro atractor fractal.

Intermitencia: episodios de crisis continua, es decir, alternancia brusca entre dos atractores, al menos uno de ellos fractal, donde la conmutación entre un atractor y el otro ocurre muchas veces y de manera impredecible.

Mapa de Poincaré: intersección de una órbita con un subespacio transversal a esa órbita. El subespacio debe tener una dimensión menos que el espacio de fases de la órbita. El resultado es una órbita discreta más sencilla que la original pero que conserva aproximadamente las mismas propiedades (Figura 96).

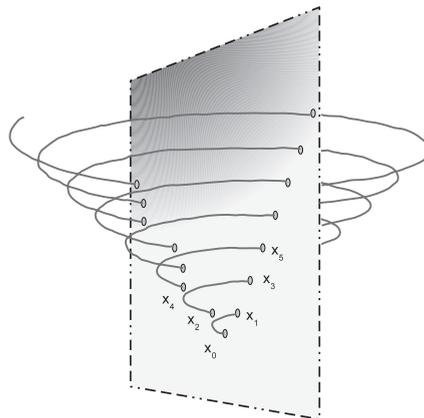


Figura 96. Mapa de Poincaré: $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ de una órbita atravesando una sección

Teorema de Whitney y Takens: permite reconstruir un atractor usando una secuencia temporal discreta de los estados por los que pasa. Para ello se usan varias series temporales construidas con la secuencia temporal de estados retrasada sucesivamente en el tiempo. El número de secuencias retrasadas que se requieren depende de la dimensión del atractor y, como tampoco suele conocerse previamente, se obtiene por prueba y error. Este teorema es muy útil porque en sistemas reales solo se dispone de secuencias temporales de sus salidas.

RESUMEN

Caos y fractales son dos aspectos del mismo objeto complejo. En la serie temporal vemos caos, y en su atractor vemos un fractal.

Volviendo a la argumentación principal del libro, el nivel de complejidad que se requiere para lograr caos es muy bajo, dado que se logra con una fórmula como la ecuación 15 (donde apenas aparecen sumas y multiplicaciones). Es decir, ni siquiera hace falta computación completa. Y para que aparezca solo se requiere una realimentación positiva y una negativa. El caos es creativo, pues permite generar complejidad donde antes no la había.

Pero, por otro lado, es difícil distinguir el caos de lo meramente estocástico. Como indicábamos en el capítulo dedicado a la complejidad, no hay un algoritmo que garantice realizar esta separación, pues para lograrlo se requiere inteligencia.

Si pensamos que un fenómeno es estocástico entonces no tiene ningún sentido tratar de controlarlo para sacarle provecho y mejorar nuestra supervivencia, dicho en términos evolutivos. Lo más que podemos hacer es obtener experimentalmente las distribuciones de probabilidad y apostar por la opción que tenga mejor esperanza matemática. Pero si nos damos cuenta de que el fenómeno realmente es caótico las cosas mejoran sustancialmente, pues eso significa que existe un modelo simple que puede ayudarnos a predecir el futuro, aunque permanezcamos limitados por un horizonte de predicción. Y podemos calcular los momentos donde el modelo es más o menos sensible al ruido. E incluso podemos controlarlo de forma muy efectiva. En EVALAB hemos hecho aportes en este sentido, controlando fácilmente sistemas caóticos usando algoritmos evolutivos (ver el trabajo de grado de Cristian Ríos, 2013). Los algoritmos evolutivos son especialmente indicados para estos casos donde se sabe que hay un orden estructural pero se desconocen los detalles, y dejamos a la evolución que se encargue de encontrarlos.

El caos tiene problemas muy serios desde el punto de vista ontológico. Decimos que hay caos en las ecuaciones de Lorenz que modelan el clima,

pero sabemos que cualquier modelo es solo una aproximación a la realidad. Entonces, ¿también habrá caos en el clima? Generalizando, si tenemos una serie de datos registrados conforme transcurre el tiempo, de algún fenómeno físico, biológico, económico o cualquier otro, no se puede saber si la serie es caótica, porque para lograrlo tenemos que probar tres cosas: sensibilidad a condiciones iniciales, mezcla de órbitas y órbitas periódicas densas. Solo la primera condición se puede analizar en un fenómeno real. Las otras dos se pueden analizar en modelos. Lo malo de los modelos es que suelen ser programas que corren en computadores digitales, por lo que nunca se llegan a manejar infinitas cifras decimales en los números. A consecuencia de ello, toda órbita termina por repetirse. Toda órbita es periódica. Es imposible tener caos en un sistema digital. En estos casos se habla de seudocaos. Es similar a lo que ocurre con los fractales, que es imposible que sean autosimilares en infinitas escalas, y nos conformamos con un margen y a los objetos resultantes los llamamos seudofractales. Y es lo mismo que ocurre con las variables aleatorias dentro de un computador, que resulta también que son periódicas —aunque con un periodo muy largo— y las llamamos entonces seudoaleatorias. Aunque no sepamos si realmente existe el caos, la metáfora que conlleva es muy útil y nos sirve para realizar predicciones más precisas que si no la usásemos.

PARA SABER MÁS

- Brian Goodwin (1998). *Las manchas del leopardo*. Barcelona: Tusquets Editores.

Es un libro muy bueno y entretenido. Brinda un fundamento computacional a las coloraciones de la piel de los animales. Explica que no solo es la evolución la que guía el desarrollo de los seres vivos (criticando así a Dawkins), sino también las matemáticas, concretamente la teoría del caos. Muestra ejemplos de caos especialmente en reacciones químicas (Belóúsov-Zhabotinsky) y las compara con las ondas producidas por ciertos tipos de amebas para agregarse en un cuerpo multicelular. Habla, además, sobre hormigas naturales y artificiales, y tamaños críticos de hormigueros.

- John Gribbin (2006). *Así de simple*. Barcelona: Crítica.

Es un libro sencillo y tiene un prefacio algo pretencioso, al contrario de otros textos escritos por el mismo autor. Sin embargo, sirve de introducción a casi todos los temas de vida artificial (fractales, caos, teoría de juegos, auto-duplicación, computabilidad, etc.). Explica varios sistemas caóticos como los asteroides, la herradura de Smale, la ecuación de Lorenz, la curva logística

y el número de Feigenbaum. Muestra los fractales más conocidos. Da una buena introducción al caos y pone como ejemplos las reacciones químicas de Belousov-Zhabotinsky y las ecuaciones de Lotka-Volterra de predator-presa. Detalla cómo se produce la coloración de la piel de los animales, con algunas conclusiones curiosas: la teoría predice que en los animales muy pequeños (ratón) y muy grandes (elefante), la piel debe ser de color uniforme, mientras que los de tamaño intermedio pueden tener franjas, rayas, pequeñas manchas, grandes manchas, conforme aumenta el tamaño (pero no del animal sino del embrión). Es imposible que las colas de esos animales terminen en manchas, sino que deben de ser a rayas. Muestra ejemplos de leyes de potencias en terremotos, tamaño de los meteoritos, ráfagas de luz de los quásares, temperatura de la Tierra, música, distribución de ciudades por cantidad de habitantes, atascos en autopistas, evolución de la bolsa, extinciones masivas, derrumbes en pilas de arena, entre otros. Habla también de los trabajos de Stuart Kauffman y John Maynard Smith. La competencia evolutiva es contra miembros de la misma especie: cuando un conejo brinca de una manera errática huyendo de un zorro, no está compitiendo evolutivamente contra el zorro sino contra los otros conejos. Ilustra además muchos sistemas de vida artificial, en especial DaisyWorld, que apoya la teoría GAIA de James Lovelock.

- Nassim Nicholas Taleb (2008). *El cisne negro*. Barcelona: Paidós.

Escrito por un corredor de bolsa que ha sufrido varios *cracks* y que demuestra lo falsas que son las asunciones estadísticas habituales (especialmente la campana de Gauss), este texto muestra que hay dos tipos de fenómenos aleatorios: “domesticados” (los juegos de casino, por ejemplo) que sí siguen distribuciones *gaussianas* de probabilidad; y los “salvajes” (casi todos los del mundo real), que siguen leyes potenciales, escalables, no integrables. Es decir, fenómenos caóticos. Los cracks de la bolsa, los terremotos, las guerras, la subida espectacular de las acciones de empresas tecnológicas y muchos otros fenómenos (adversos y también beneficiosos) siguen leyes potenciales. Analizarlos usando las campanas de Gauss es una equivocación y si lo hacemos suele acrecentar las pérdidas en el caso de los adversos, o impide que aprovechemos oportunidades en el caso de los benéficos.

- Ian Stewart (1997). *El laberinto mágico*. Barcelona: Crítica.

Libro sencillo sobre caos, con algunas cosas interesantes, aunque le falta profundidad. Explica la relación del juego “Torres de Hanoi” con el fractal de Sierpinski, el problema de Monthly Hall, la inestabilidad del sistema solar y apenas menciona de pasada el control de caos para generar órbitas distintas a las tradicionales.

- Ian Stewart (1991). *¿Juega Dios a los dados? La nueva matemática del caos*. Barcelona: Editorial Grijalbo-Mondadori.

Habla de cómo diferenciar lo aleatorio de lo caótico, y de la complejidad. Cita los trabajos de Chaitin.

- Miroslav M. Novak (ed.) (2006). *Complexus mundi: emergent patterns in nature*. New Jersey: World Scientific.

Es una recopilación de artículos, usualmente bastante teóricos y de cierta dificultad. Recomiendo los siguientes:

Páginas 1-8: L. S. Liebovitch, V. K. Jirsa, L. A. Shehadeh, “Structure of genetic regulatory networks: evidence for scale free networks”.

Páginas 9-31: Bruce J. West, “Modeling fractal dynamics”. Plantea que las mediciones fisiológicas en humanos (flujo de velocidad arterial) son fractales. Y que cuando comienza una enfermedad su espectro multifractal se vuelve menos rico.

Páginas 113-133: Klaus Mainzer, “Complexity in nature and society”. Excelente presentación de las ciencias de la complejidad y sus aplicaciones en economía. Después de dar definiciones (espacio de estados, dimensionalidad, atractores), cuenta que el sistema solar es no-computable (caótico). Muestra cómo reconstruir el espacio de estados de un sistema dinámico por medio de medidas de series temporales, retrasándolas en el tiempo varias veces. Describe además varios sistemas complejos físicos, químicos, ecológicos, las neuronas en el cerebro, así como fenómenos de autoorganización colectiva (tráfico de automóviles).

Páginas 155-170: Hermann Haken, “Synergetics on its way to life sciences”.

Páginas 171-180: Nicoletta Sala, “Complexity, fractals, nature and industrial design: some connections”.

Páginas 287-296: A. Nari, G. Ayad, S. Padulosi, *et ál.* “Analysis of geographical distribution patterns in plants using fractals”.

Páginas 297-304: Mario Markus, Malte Schmick, Eric Goles, “Hierarchy of cellular automata in relation to control of chaos or anticontrol”.

Páginas 323-332: Dane R. Camp, “A cornucopia of connections: finding four familiar fractals in the Tower of Hanoi”.

Páginas 333-342: W. Klonowski, E. Olejarczyk, R. Stepień, *et ál.* “Monitoring the depth of anaesthesia using fractal complexity method”.

- David G. Green y David Newth (2005). Towards a theory of everything? Grand challenges in complexity and informatics. *Complexity International*, 8, pp. 1-12. Australia. Disponible en: <https://goo.gl/bbFRVR>

El comienzo del artículo es muy interesante, introduciendo temas de complejidad y computabilidad (autoorganización, cambios de fase, la importancia de los grafos dirigidos, Prigogine, redes booleanas estocásticas...). Sin embargo, las conclusiones son de poca calidad.



Fuente: Fotografía de dominio público. Disponible en: <https://goo.gl/KQrxMD>

Personaje 3

Henri Poincaré (1854-1912)

Jules Henri Poincaré fue un matemático y físico francés, posiblemente el primero en descubrir el fenómeno del caos, aunque también trabajó en otros temas, como la teoría de la relatividad especial.

En una época histórica donde se pensaba que las matemáticas podían resolver cualquier problema, aún no se había encontrado una solución al llamado “problema de los tres cuerpos”: las leyes de Newton se pueden aplicar fácilmente a dos cuerpos, pero no a tres. Por ello, Poincaré participó en un concurso relacionado con ese tema propuesto por el rey de Suecia, quien quería saber si las órbitas de los planetas eran estables. Ya era conocido el cálculo diferencial de Leibnitz y Newton, que usó para obtener aproximaciones al problema. Sus conclusiones fueron que, en general, no era posible calcular la trayectoria de tres o más cuerpos influidos mutuamente por la gravedad, pues cualquier pequeño error de medida inicial influía grandemente en los resultados. Pero también logró establecer que las órbitas conocidas no iban a cambiar sustancialmente en los próximos miles de años, lo cual fue suficiente para satisfacer al rey de Suecia y que le diera el premio. Aunque no le puso nombre, Poincaré fue el primero en entender y enfrentarse a problemas caóticos. Hoy en día sabemos más sobre el problema de los 3 o más cuerpos. Por ejemplo, cuando dos objetos pequeños orbitan alrededor de uno grande en sincronía, esto es, los periodos de ambos tienen una relación entera, entonces el sistema es inestable. Esto se debe a que se encontrarán cerca (ejerciendo entre ellos la máxima influencia gravitatoria) una y otra vez en el mismo punto de sus órbitas. Es análogo a empujar un columpio siempre en sincronía: cada vez tomará más velocidad, pudiendo despedir al niño del columpio o hacerle dar vueltas de campana. Mientras que si se empuja el columpio en momentos elegidos al azar no se le transferirá energía apreciablemente. Esa es la razón para que en los sistemas planetarios haya zonas orbitales vacías. En los sistemas de anillos de Saturno y otros planetas también existen zonas vacías —por los mismos motivos— que corresponden a órbitas sincrónicas con alguno de los satélites, por lo que el polvo fue expulsado de allí hace rato. De hecho, esa es la nueva definición de planeta: aquel cuerpo que ha barrido su órbita. Y Plutón todavía no lo ha hecho, por lo que ahora desciende a la categoría de los planetoides.

REFERENCIAS

Libros, artículos y enlaces web

- Briggs, J. y Peat, F. D. (1994). *Espejo y Reflejo*. Barcelona: Editorial Gedisa.
- Gleick, J. (1988). *Chaos. Making a New Science*. New York: Penguin Book.
- Grebogi, C., Ott, E., Pelikan, S. y Yorke, J. A. (1984). Strange Attractors that are not Chaotic. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 13(1-2), pp. 261-268.
- Li, T-Y. y Yorke, J. A. (1975). Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10), pp. 985-992.
- Mandelbrot, B. B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores.
- Martín, M. Á., Morán, M. y Reyes, M. (1998). *Iniciación al caos*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Novak, M. M. (2006). *Complexus Mundi. Emergent Patterns in Nature*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Schroeder, M. R. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Spitznagel, C. R. (2000). *Vignette 9: The Chaos Game*. Recuperado el 2 de septiembre de 2017. Disponible en: <https://goo.gl/gRtSCL>
- Thompson, C. H. (2004). *The Chaotic Ball: An Intuitive Analogy for EPR Experiments*. Recuperado el 8 de agosto de 2004. Disponible en: <https://goo.gl/RequKx>

Películas y videos

- Aldoaloz (2007). *Dynamic Geomag: Chaos Theory Explained*. Recuperado el 2 de septiembre de 2017. Disponible en: <https://goo.gl/3vSmNm>
- Peitgen, H. O. (2016). *Pendulum Interacting With 3 Magnets*. Recuperado el 2 de septiembre de 2017. Disponible en: <https://goo.gl/1RSRLt>
- Starrett, J. (2006). *Chaotic 1,2 pendulum*. Recuperado el 2 de septiembre de 2017. Disponible en: <https://goo.gl/zKcpCH>

Tesis y trabajos de grado en EVALAB

- Ríos, C. L. (2013). Control de sistemas dinámicos caóticos usando algoritmos evolutivos. [Tesis Meritoria]. Cali: Universidad del Valle.
- Romero, V. A. (2012). Análisis del flujo de datos en redes de comunicaciones mediante teoría de caos. Cali: Universidad del Valle.
- Torres, A. R. (2011). Objeto virtual de aprendizaje para la teoría del caos y su relación con los fractales. Cali: Universidad del Valle.