Capítulo 4

LEYES DE POTENCIAS

El 20% de las personas más ricas de Italia poseen el 80% de los recursos. El 80% de las ventas viene del 20% de los clientes. Pero también un 20% de clientes son los que producen el 80% de las reclamaciones. Frases como esta se conocen como la regla 80/20 de Pareto, quien la enunció en 1896. Y son un caso particular de las leyes de potencias donde lo que se quiere recalcar es que la mayor parte de un fenómeno es debida a unos pocos sucesos. Se trata de una regla frecuente en ámbitos tan variados como la física, la biología, la economía o las ciencias sociales. Saber que un fenómeno sigue una ley de potencias puede tener consecuencias a la hora de afrontarlo. Por ejemplo, si averiguamos que el 80% de los delitos son causados por un 20% de delincuentes, la policía debería centrarse en buscar y detener a ese 20% —con lo cual la seguridad en la ciudad se mejoraría en un 80%— y no invertir tanto tiempo y recursos en el otro 80% de delincuentes, que solo aportarían una mejora del 20% a la seguridad de la ciudad.

Otro ejemplo es el de los terremotos. Hay una cantidad desmesuradamente alta de terremotos de magnitud pequeña, frente a una cantidad pequeñísima de terremotos de magnitud grande (Figura 97). Otro ejemplo es que ha habido en nuestro planeta unas pocas grandes extinciones de seres vivos, y muchísimas pequeñas. Ambos fenómenos siguen leyes de potencias.

Las leyes de potencias se pueden formular matemáticamente modelando el fenómeno con una variable estocástica X, y caracterizando la probabilidad de que ocurra un evento de magnitud mayor o igual a un cierto valor x:

$$p(X \geq x) = K\,x^{-\alpha} \qquad \text{Ec. 24}$$

Donde α es una constante dependiente del fenómeno.

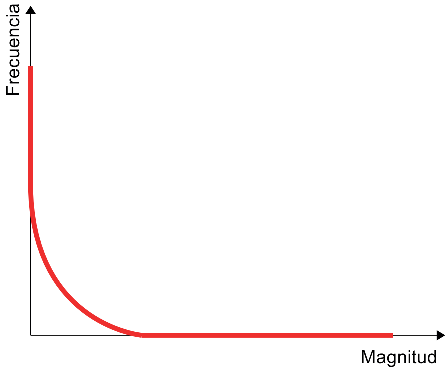

Figura 97. Frecuencia de los terremotos versus su magnitud

Una propiedad interesante de las leyes de potencias es que no tienen una escala característica. Son libres de escala. Eso significa que si ampliamos o reducimos una de estas curvas, obtenemos la misma curva (ver ecuación 25, donde al multiplicar *x* por una constante *c*, al final sale la misma ley de potencias). Son autosemejantes, como los fractales.

$$p(X \geq cx) = K(cx)^{-\alpha} = Kc^{-\alpha}\,x^{-\alpha} = K' x^{-\alpha} = K''\,p(X \geq x) \qquad \text{Ec. 25}$$

Si tomamos logaritmos a ambos lados tenemos

$$\log(p(X \geq x)) = \log(K) - \alpha \log(x) \qquad \text{Ec. 26}$$

Y si dibujamos esta ecuación usando ejes *log-log*, sale una línea recta de pendiente -α (Figura 98).

Esta es una forma rápida de identificar fenómenos que siguen leyes de potencias, aunque como veremos enseguida, no es nada precisa.

Para considerar la frecuencia de un fenómeno *x* estamos usando su densidad de probabilidad *p(x)*, pero también se puede usar la densidad de probabilidad acumulada, en cuyo caso tendremos que hablar de la distribución de Pareto —como en los ejemplos que mencionamos al principio—, donde el número de eventos mayores que *x* es proporcional al inverso de una potencia de *x*. Pero el fenómeno es el mismo, lo que cambia es la forma de presentarlo. La principal ventaja de usar funciones de densidad de probabilidad acumulativas es que no requieren hacer histogramas, cuando partimos de una tabla de datos experimentales. Y, por tanto, no hay que hacer histogramas acumulando valores en rangos, cuya anchura puede ser bastante discutible.

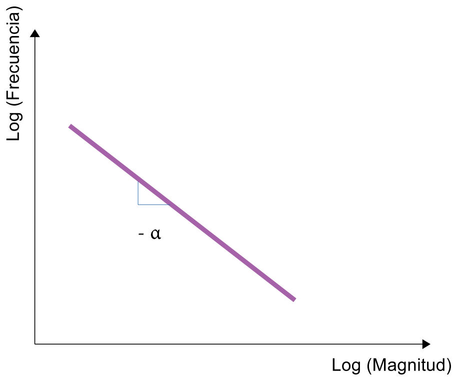

Figura 98. Ley de potencia en escala log-log

Además de la regla de Pareto 80/20, las leyes de potencias tienen otras formulaciones. Están las leyes de Zipf que usan un gráfico de frecuencias (ordenadas) *versus ranking* (abcisas), es decir, se considera la frecuencia con que ocurre un fenómeno respecto a su orden en la tabla de frecuencias. Zipf ordenó las palabras que se encontraban en un libro escrito en inglés —primero la más frecuente y de última la menos frecuente— y encontró que para cada palabra su número de orden era inversamente proporcional a su frecuencia. Este tipo de distribuciones solo considera un tipo de variables, por ejemplo, la frecuencia de una palabra *versus* su *ranking*. Mientras que las distribuciones de Pareto consideran la relación entre dos variables distintas, como tamaño de una ciudad versus el número de ciudades que tienen ese tamaño.

Pero nada impide considerar en Pareto las dos siguientes variables: frecuencia de ocurrencia y *ranking* en una ordenación. Y entonces hay una relación obvia entre distribuciones de Pareto y de Zipf. Cuando decimos que el terremoto que ocupó el puesto *N* en el *ranking* tuvo una magnitud *M* (formulación de Zipf), ello equivale a decir que ha habido *N* terremotos de magnitud *M* o mayor (formulación de Pareto) (Adamic, 2017).

Y hay otras formulaciones más particulares, que se encuentran en artículos más antiguos. Por ejemplo, los primeros generadores algorítmicos de música usaban la distribución *1/f*, que significa que había muchas notas que diferían poco entre sí, y algunos pocos cambios grandes en las notas. Y la verdad, sonaban muy naturales, con melodías que tenían partes repetitivas y de vez en cuando algunas sorpresas, como es habitual en la música creada por humanos.

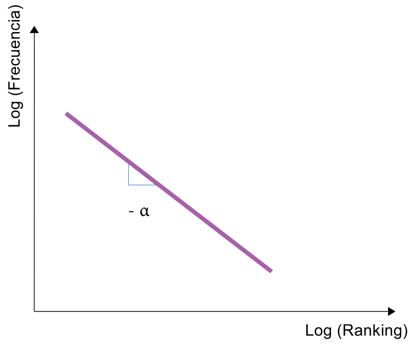

Figura 99. Distribución de Zipf (univariada)

Cuando no hay realimentaciones, las salidas de un sistema son fácilmente analizables pues podemos sacar promedios. La razón de ello es el teorema del límite central: cuando hay muchas variables estocásticas independientes, el promedio de todas esas variables sigue una distribución normal, también llamada campana de Gauss, donde el valor promedio está bien establecido, y la varianza (relacionada con la anchura de la campana) disminuye conforme aumenta el número de variables consideradas (Figura 100). Eso es una buena cosa para los estadísticos pues a medida que se toman más muestras el promedio converge a un valor bien definido, lo que permite hacer predicciones sobre futuros valores de esas variables estocásticas.

Pero cuando hay al menos una realimentación positiva, la situación deja de ser así. Aparecen dependencias: la salida depende de las salidas anteriores. Y lo que le ocurre a una parte del sistema depende de lo que les ocurre a otras partes del sistema. Las variables estocásticas ya no son independientes, por lo que no aplica el teorema del límite central. En este caso no es sencillo sacar promedios, e incluso pueden no existir, en el sentido de que la suma no converja conforme se añadan más términos de la serie de datos, sino que presente fluctuaciones erráticas. Por otra parte, es difícil hacer predicciones acerca de lo que le pasará a ese sistema en el futuro. En la ecuación 24, cuando $0<\alpha\leq 2$ entonces la distribución tiene una varianza infinita. Y cuando $\alpha\leq 1$ entonces la distribución también tiene una media infinita. En cualquiera de los dos casos, las correspondientes distribuciones son difíciles de manejar y no permiten hacer predicciones. En este sentido, los sistemas que responden a leyes de potencia, aumentan su libertad.

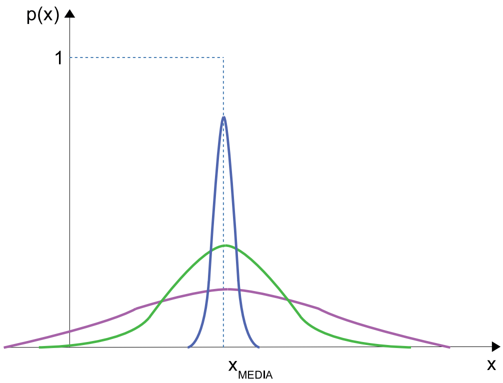

Figura 100. Distribuciones normales con varianza pequeña (azul), unitaria (verde) y grande (violeta)

Características de las leyes de potencias:

- Son libres de escala. Igual ocurre con las figuras fractales en el espacio, y con las series caóticas en el tiempo.
- No tienen promedio, por lo que no se pueden abordar con las herramientas tradicionales de la estadística. Tienen una "cola gorda"[25], o sea, que no disminuye rápidamente hacia cero. Y eso significa que puede haber eventos grandes e impredecibles.
- Al dibujarlas en un gráfico *log-log* sale una línea recta cuya pendiente es el exponente de la ley de potencias. Pero no toda línea recta implica una ley de potencias, pues otras distribuciones también dan líneas aproximadamente rectas. Además, las verdaderas leyes de potencia, de forma similar a lo que ocurre con los fractales y el caos, solo existen en los modelos matemáticos. Las que aparecen en la vida real no son perfectas, y hay escalas a las que dejan de cumplirse (lo que se llaman puntos de corte), por lo que pueden confundirse con otro tipo de distribuciones.
- Se generan de varias formas (Hilbert, 2013b):
    - Criticalidad autoorganizada. En las dunas, al superarse una pendiente crítica de alrededor del 35%, aumenta la probabilidad de se produzca una avalancha que lleve el sistema por debajo de ese umbral. El tamaño de la avalancha respecto a su frecuencia sigue una ley de potencias. El fenómeno de avalancha es una realimentación positiva, pues un grano de arena que ruede puede golpear y hacer rodar a muchos otros. Mientras que la pendiente umbral juega un papel de realimentación negativa hacia donde tiende a estabilizarse la duna.

25 Se llama así en inglés, "*fat tail*", pero no busquen el término en Internet, pues salen otras cosas.

- Conexión preferencial[26]. Se modela muy bien con un grafo al que van añadiéndose nuevos arcos al azar, pero donde es más probable que llegue un nuevo arco a un nodo, cuantos más arcos ya tenga. A este fenómeno se le llama también *rich gets richer*. Hay muchísimos ejemplos en cualquier tema. Quien tiene muchos amigos conocerá a más gente a través de ellos y conseguirá así muchos más amigos. Los artículos más citados son más conocidos y, por ello, recibirán todavía más citas.
- Procesos de optimización (Sornette, 2000). Aunque no cualquier proceso, sino solo aquellos donde las variables a optimizar están relacionadas por medio de restricciones que siguen alguna ley de potencias.
- Crecimiento exponencial con difusión exponencial (de tecnologías, de animales o cualquier otro tipo). Son dos exponenciales que, al dibujarlas en una gráfica *log-log*, generan también una recta indicadora de ley de potencias (Hilbert, 2013).
- Relaciones geométricas área/volumen, que tienen que ver con el concepto de dimensión en los fractales, aunque realmente aquí no hay en absoluto fractales ni ningún tipo de complejidad. Cuando cualquier objeto cotidiano aumenta su volumen, su área crece más lentamente. Y la relación entre ambos es una ley de potencias.

$$\frac{Area\ (esfera)}{Volumen\ (esfera)} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r^3/3} \propto r^{-1} \qquad \text{Ec. 27}$$

- Si el objeto es un fractal, por ejemplo los vasos sanguíneos tratando de llevar sangre a cada célula de un volumen, el exponente de la ley de potencias será distinto al de la ecuación anterior.
- Escalamiento alométrico. Relacionan algún fenómeno metabólico, como el consumo energético, las horas de sueño o la longevidad de un animal respecto a su peso. Suelen resultar exponentes de tipo -n/4 siendo n un entero pequeño (Hilbert, 2013b). Uno de los investigadores más destacados en esto es Geoffrey West (2011), quien ha encontrado una relación interesante entre bosques, ciudades y empresas. La ley de potencias más exacta y abarcante que conocemos es la que relaciona la tasa metabólica de un ser vivo con su peso, pues se aplica desde las amebas hasta las ballenas[27] y tiene un

26 Preferential attachment.

27 Aunque ya hay trabajos (Kolokotrones, 2010) que matizan que esta relación no es completamente potencial.

> exponente de ¾. Eso significa que al duplicar el peso de un animal, solo requiere un 75% más de consumo diario de energía, para poder sobrevivir. Esto es, hay una economía de escala. Cuanto más grande es un ser vivo, más barato es de mantener. West encontró que en las ciudades pasa lo mismo: la infraestructura eléctrica, de calles y de comunicaciones crece más lentamente que el tamaño de la ciudad. Hay una economía de escala por medio de una ley de potencias similar a la biológica (aunque con un exponente de 0.85). A la vez que hay otras leyes de potencia, esta vez con exponentes mayores que 1 (concretamente 1.15), en los aspectos culturales de las ciudades, como las ofertas de trabajo, instituciones educativas, hospitales, trabajos creativos, patentes, aunque también en crímenes y enfermedades. Esto es lo que atrae a la gente del campo a las ciudades y genera una distribución de tamaños de ciudades *versus* frecuencias que también sigue una ley de potencias, aunque ahora por el mecanismo de conexión preferencial. Lo mismo ocurre con las empresas, cuyo crecimiento va guiado por una ley de potencias con exponente menor que uno, es decir, hay economías de escala. Y la consecuencia que saca West es que como los seres biológicos nacen, crecen inicialmente muy rápido, luego más lento, hasta que finalmente se estancan y mueren, lo mismo ocurre con las empresas.

Un buen lugar donde encontrar las leyes de potencias que modelan diversos fenómenos junto a sus exponentes es KONECT (2017). Otro donde encontrar cómo generar estas distribuciones es el texto de Mitzenmacher (2004). Y una bonita e interesante introducción al tema sin ninguna complicación matemática la encontramos en Vsauce (2015).

Las leyes de potencia pueden ser crecientes, decrecientes o con colas hacia ambos lados. Lo más fácil de entender de una ley de potencias es que las colas no decrecen rápidamente. No hay un valor a partir del cual se pueda despreciar lo que queda de la cola. O sea que si hacemos una integral de la función de probabilidad desde menos infinito hasta más infinito para averiguar el valor promedio, no se puede despreciar ninguna parte de la función, no se puede truncar, todos los valores contribuyen al promedio y, precisamente por eso, el promedio diverge. Lo vamos a entender mejor con un par de ejemplos, sacando la estadística de la altura de las personas por un lado, y de sus salarios, por otro.

En una calle de Cali preguntamos la altura y el salario mensual que ganan todos los transeúntes. El resultado puede ser como lo que muestra la figura 101: son 8 personas y su promedio es 175 cm de altura y USD 400 mensuales de salario. Dejamos pasar más tiempo y ampliamos la cantidad de calles para hacer la encuesta. Van 500 personas y, por casualidad, pasó por una de las calles un jugador de baloncesto que medía 210 cm. Al añadirlo a la lista, el promedio de alturas subió algo, pero realmente muy poco. Casi no afectó el promedio. Podemos estimar lo que afectó como (210-175)/500 =0.07 cm, es decir, menos de un milímetro. El promedio de altura es ahora 175.07 cm. Pero también encuestamos a un empresario de mucho éxito, cuyas ganancias mensuales son de USD 1.000.000. Al añadir este valor, el promedio salarial nos cambió por completo, y ahora es USD 2.399. Con un solo nuevo dato, el promedio salarial se multiplicó por 6.

	Altura (cm)	Salario (USD)
Persona 1	170	450
Persona 2	168	350
Persona 3	184	600
Persona 4	181	0
Persona 5	184	480
Persona 6	179	520
Persona 7	157	390
Persona 8	177	410

Figura 101. Datos de altura y salario de 8 personas

Si seguimos añadiendo muestras a la encuesta, por ejemplo, ampliándola a todo el país e incluso a todo el planeta, nos iremos encontrando con algunas personas muy altas (pero nunca mayores a 272 cm que es el actual Guiness Record). De modo que el promedio de alturas converge rápidamente y no le afectan pequeñas desviaciones como esta. La altura de una persona está limitada por razones físicas y biológicas. No ocurre lo mismo para los salarios, que no tienen límite. El record mundial está en USD 333.000.000 mensuales, que movería sustancialmente cualquier promedio que tuviéramos. Y si dejamos pasar unos años, ese record seguirá subiendo.

Al hecho de que puedan aparecer datos extremadamente grandes e imprevistos se le llaman "cisnes negros" (Figura 102), término popularizado por Nassim Taleb (2008) en el libro del mismo nombre, en el que cuenta anécdotas personales sobre su vida de corredor financiero en Estados Unidos. Nassim nos explica que se pensaba que todos los cisnes eran blancos y que no se tenía ningún indicio de que pudiera ser de otra manera hasta que se encontró uno negro en las primeras expediciones a Australia. Los cisnes negros ocurren en economía, en la bolsa —con cierta frecuencia para nada previsible— y también en los terremotos que producen muchos daños pero nunca se sabe cuándo van a suceder. En definitiva, Nassim está hablando de leyes de potencia en su libro aunque nunca lo menciona por este nombre. Él piensa que el futuro no se puede predecir desde el pasado, y que lo único que hacen los mal llamados expertos es crear una narrativa causal convincente cuando sucede algún cisne negro, pero *a posteriori*. Nassim tiene un segundo libro continuación de este, donde explica que los cisnes negros también pueden ser eventos improbables pero de grandes ganancias, y que hay que saber exponerse a ellos.

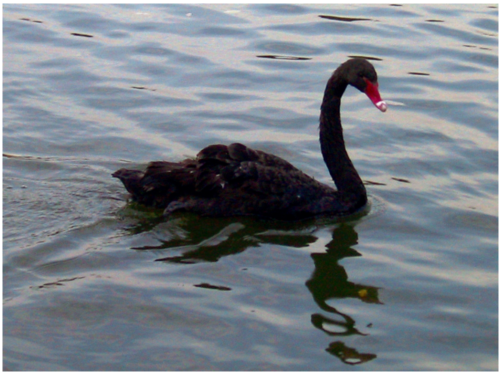

Figura 102. Cisne negro, São Paulo

Lo que más me impactó de este libro es su definición de "héroe anónimo". Dice Nassim: supongamos que en fechas anteriores al ataque a las torres gemelas del 11-S, un funcionario regulador de seguridad en las compañías aéreas se da cuenta de que existe la posibilidad de un ataque con aviones, debido a que la puerta de la cabina de los pilotos permite entrar a cualquier pasajero. Podría sacar una ley obligando a las compañías aéreas a poner allí una puerta de alta seguridad. Y es natural pensar que las compañías aéreas se van a negar a hacer ese gasto extra, alegando que nunca ha pasado nada que pueda indicar que usar puertas endebles supone un grave peligro. Seguimos imaginando que, después de un gran tira y afloja, el funcionario visionario logra promulgar la ley, con lo que todas las compañías aéreas se verán forzadas a poner esas puertas de seguridad. ¿Qué pasará después? Nada. No habrá atentados, y al cabo de los años lo despedirán por obligar a hacer gastos desmesurados en medidas que no sirvieron para nada. Habrá salvado muchas vidas, pero precisamente por eso nadie se dará cuenta de ello. Es un héroe anónimo que morirá de hambre.

Aquí radica una de las causas de la impredecibilidad. El futuro, ontológicamente, no existe. De modo que si alguien trata de modificarlo no sabrá nunca si lo ha logrado. Por supuesto, esto es de aplicación a fenómenos modelados por leyes de potencias. Cuando tenemos otras leyes de probabilidad con promedios y varianzas bien determinados sí se pueden hacer predicciones razonables.

Por desgracia, las leyes de potencias nos generan mucha confusión. Por un lado, que en una gráfica *log-log* aparezca una recta no quiere decir que se trate de una ley de potencias. Hay exponenciales lentas y curvas *log-normal* que también podrían confundirse con rectas. Se debe usar algún método para determinar la confiabilidad del ajuste de datos a un modelo potencial. Lo que es peor, se han hecho experimentos con simuladores sintéticos de leyes de potencias y a veces los algoritmos que emplean los estadísticos fallan en reconocerlas.

Por otro lado, aunque la mayoría de las veces en las que hay una ley de potencias esto es un indicador de un fenómeno complejo subyacente, en ocasiones no es así. Por ejemplo, al generar palabras al azar en un idioma inventado (poniendo simios a escribir en un teclado) también aparecen las mismas leyes de potencias que encontró Zipf en el inglés, español y demás idiomas humanos.

Por último, también hay muchas publicaciones con equivocaciones o que se contradicen unas a otras. Por ejemplo, no es cierto que partir un palo en trozos al azar genere una distribución potencial, como incorrectamente indica Gell-Mann (1996) que, por lo demás es un excelente libro y de los primeros en tratar el tema de la complejidad. Al igual que en los fractales y en el caos, existen varios mitos alrededor de este tema, tanto por exceso (creer que casi todo genera leyes de potencias) como por defecto, que ahora está muy de moda, como una especie de efecto rebote. Recordemos que estamos trabajando con modelos, que son únicamente una aproximación a la realidad. En este sentido no existe ningún fractal en la naturaleza, ni tampoco el caos, ni las leyes de potencia. No nos descubren nada nuevo quienes critican estos modelos. Pero los modelos son simplificaciones útiles, que capturan algo importante de los objetos naturales, aun cuando no sean perfectos. En este sentido es válido decir que un helecho es un fractal porque podemos ver la misma estructura geométrica en 4 niveles. Desde luego que hay límites, tanto en lo grande (es imposible tener helechos que sobrepasen el tamaño del universo) como en lo pequeño (de tamaño menor a un átomo). ¿Es el clima caótico? ¿O solo lo es su modelo simplificado, de las ecuaciones de Lorenz? Esas reflexiones tan puntillosas no nos dejan ver el bosque: estamos estudiando modelos de donde se pueden deducir propiedades aproximadas de los objetos que representan.

De todos modos se puede hacer una reflexión interesante: si resulta ser que el mundo en que vivimos es solo computación, quizás algún día podamos llegar a tener modelos que coincidan exactamente con la realidad, si logramos caracterizar bien cada uno de los fenómenos complejos que aparecen (caos, fractales y leyes de potencia).

Resumen

Cuanto más rico eres, más dinero puedes conseguir. Cuanto más poder tienes, más poder conseguirás. La gente prefiere vivir en las ciudades más grandes, con lo que se agrandarán aún más. Los artículos de investigación más referenciados tienen mayor visibilidad, por lo que es más probable que vuelvan a ser citados en trabajos posteriores. Los investigadores quieren publicar en las revistas más grandes y con mayor prestigio, con lo cual esas revistas crecerán aún más. Podríamos seguir enumerando casos. Pero a donde quiero llegar es que si no te gusta esta situación, si no te gustan las concentraciones de poder, de dinero o prestigio, no busques soluciones en la economía ni en la sociología. Búscalas en las matemáticas. Porque este proceso ocurre debido a realimentaciones que habitualmente dan lugar a distribuciones estadísticas potenciales, *log-normales* o exponenciales. Y también al revés. Cuando en nuestros datos aparezcan alguna de estas distribuciones, es un buen indicador de que estamos lidiando con un fenómeno de alta complejidad.

Para saber más

- Per Bak y Kan Chen (1991). Self-Organized Criticality. *Rev. Scientific American*, 264(1), pp. 46-53.

Las pilas de arena se derrumban al alcanzar cierta pendiente. Suelen ocurrir muchos derrumbes pequeños y pocos grandes. A ello se le llama *power laws* (leyes de potencias), que son otra forma de decir "caos". Las dunas son todas similares debido a este fenómeno de autoorganización de la pendiente.

- Henrik Jeldtoft Jensen (1998). *Self-Organized Criticality*. New York: Cambridge University Press.

Crítica al artículo anterior. De todos modos, lo que dice Bak es correcto si se sustituye los pequeños granos de arena por bolas con cierta fricción. Propone otros ejemplos donde sí se dan las leyes de potencia.

Referencias

Libros, artículos y enlaces web

Adamic, L. A. (2017). Zipf, Power-laws, and Pareto: a ranking tutorial. *Information Dynamics Lab, HP Labs*. Recuperado el 10 de septiembre de 2017. Disponible en: https://goo.gl/GgHz91

Gell-Mann, M. (1996). *El quark y el jaguar*. Barcelona: Tusquets.

Hilbert, M. (2013). Scale-free power-laws as interaction between progress and diffusion: a critical evaluation of fat-tail distributions. *Complexity*. Wiley. DOI: https://doi.org/10.1002/cplx.21485

Kolokotrones, T., Savage, V., Deeds, E. J. y Fontana, W. (2010). Curvature in metabolic scaling. *Nature 464*, pp. 753-756. DOI: https://doi.org/10.1038/nature08920

KONECT (2017). Power law exponent. Recuperado el 10 de septiembre de 2017. Disponible en: https://goo.gl/YugZYC

Mitzenmacher, M. (2004). A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions. *Internet Mathematics, 1*(2), pp. 226-251.

Sornette, D. (2000). *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*. Springer.

Taleb, N. N. (2008). *El cisne negro*. Barcelona: Paidós.

Películas y videos

Hilbert, M. (2013b). 9 CCSSCS: Leyes de potencias. Recuperado el 2 de septiembre de 2017. Disponible en: https://goo.gl/HZRWm2

Vsauce (2015). The Zipf Mystery. Recuperado el 20 de octubre de 2016. Disponible en: https://goo.gl/pTv6Be

West, G. (2011). The surprising math of cities and corporations. TED. Recuperado el 2 de septiembre de 2017. Disponible en: https://goo.gl/AA24Fc