Capítulo 6

TEORÍA DE JUEGOS

Como tantas otras cosas relacionadas con estos temas, la teoría de juegos fue inventada por uno de los grandes de la ciencia y la ingeniería, von Neumann (con la colaboración de Morgensten) en 1944. Aquí la palabra "juego" hay que entenderla en un sentido amplio, como una situación donde interactúan dos o más personas, cada una tratando de conseguir sus objetivos.

Entonces abarca no solamente los juegos propiamente dichos como el ajedrez o las damas, sino también:

- Juegos económicos. Fijar precios para comprar o vender bienes muebles o inmuebles. Hacer ofertas de compra o venta de acciones y divisas. Hacer préstamos y fijar los intereses. Negociar los salarios o el salario mínimo.
- Juegos políticos. Decidir el tipo de publicidad durante campañas electorales. Buscar cooperación o confrontación con otros países.
- Cualquier otra interacción, como conducir un automóvil en una calle muy transitada, decidir con tu pareja en qué barrio vivirán o a qué restaurante irán esta noche.

La teoría de juegos en muchos casos se relaciona con la evolución, ya que los animales cuyo comportamiento no esté adaptado al medio, desaparecen. Lo mismo pasa con las empresas que toman decisiones equivocadas. La teoría de juegos nos dice matemáticamente cuáles son las estrategias óptimas y, si nos desviamos de ellas, nuestro grado de supervivencia y reproducción irá disminuyendo[44].

Vamos a ver entonces una breve introducción a la teoría de juegos, lo justo para saber usar las matrices de pagos que son el mecanismo que nos ayudará a entender cómo surge la cooperación. Por otro lado, la teoría de juegos hoy día abarca otros temas interesantes como las creencias, la aversión al riesgo, objetivos borrosos o incluso distintos para cada jugador, y la psicología de los jugadores. Pues aunque nos atribuimos mucha inteligencia, los experimentos sociales muestran que somos muy irracionales (Ariely, 2008). No vamos a entrar a detallar nada de ello, pero animo al interesado a hacerlo buscando en los libros indicados en la bibliografía.

En teoría de juegos lo primero que hay que aprender es que para uno lograr sus objetivos no se puede ser ingenuo. Hay que pensar estratégicamente.

Pongamos un ejemplo clásico: las votaciones. Ana, Braulio y Cecilia conforman un club y, según el orden del día, deben votar a ver si aceptan a Yuri como nueva miembro. Sin embargo, aparece otra propuesta, que es sustituir la candidata Yuri por Zoila. Entonces han llegado a un acuerdo sobre cómo desarrollar la votación, que va a tener dos fases: primero se decidirá cuál de las dos (Yuri o Zoila) se presenta como candidata. Y después se votará a ver si se acepta esa candidata.

Supongamos que las preferencias de cada votante son las de la tabla 16.

Tabla 16. Ejemplo de preferencias en una votación

Orden de preferencia	Ana	Braulio	Cecilia
Primero:	Yuri	nadie	Zoila
Segundo:	nadie	Yuri	Yuri
Tercero:	Zoila	Zoila	nadie

La votación tiene dos fases como se muestra en el diagrama de la figura 171. Esta manera de presentar un juego, en forma de árbol con todas sus posibilidades, se llama forma extensiva. Si todos los integrantes del club votan ingenuamente, entonces en la primera votación entre Yuri o Zoila ganará Yuri. Y en la segunda votación entre Yuri o nadie, también ganará Yuri, que será entonces admitida al club. En este diagrama se muestran todas las posibilidades y se marca en color rojo la rama que ganará sabiendo las prefe-

44 Las empresas también se reproducen cuando les va bien: abren sucursales, con comportamientos, objetivos y funcionalidades muy similares a la empresa original.

rencias de los votantes. Entonces, en el hipotético caso de que se vote entre Zoila y nadie, ganará nadie, por lo que se marca ese arco de color rojo.

Hay un único camino rojo que va desde el inicio hasta el final, y conduce a que la ganadora será Yuri. Entonces, con base en estas preferencias, si todos votan de forma ingenua, ganará Yuri.

Pero como todos conocen las preferencias de los demás, Braulio se dará cuenta que no tiene sentido votar contra Zoila en la primera votación, ya que si Zoila gana en la primera votación, "nadie" ganará en la segunda, que es lo que quiere Braulio.

Además, Cecilia se puede dar cuenta de lo que Braulio intentará hacer. Sabe que Zoila no puede ganar, por lo que votará por Yuri, que lo prefiere sobre "nadie".

Está claro que si unos votan estratégicamente y otros ingenuamente, los resultados pueden ser distintos a los esperados.

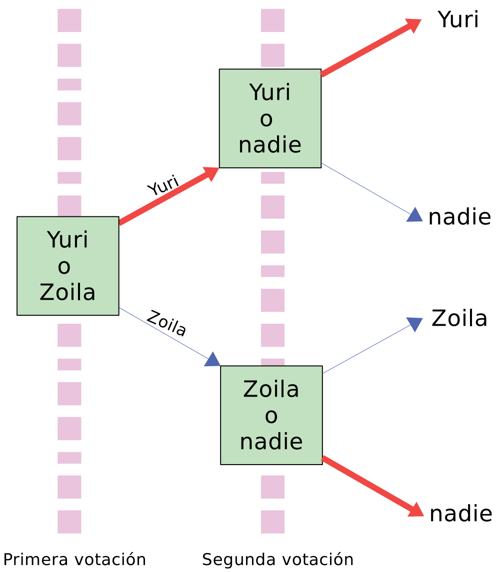

Figura 171. Árbol del juego

El razonamiento de Braulio y el de Cecilia es una inducción hacia atrás, también llamado algoritmo de Zermelo.

Las votaciones son ejemplo de relaciones no-transitivas. Un sistema perfecto de votación democrática por parejas de candidatos es, en principio, imposible según demostró el premio Nobel de economía Kenneth J. Arrow. Esto es muy fácil de ver: en el ejemplo de la tabla 17, si la votación la hacemos seleccionando candidatos de dos en dos, puede salir cualquier resultado, dependiendo del orden de selección.

Tabla 17. Empate en preferencias que hace que pueda ganar cualquiera

Orden de preferencia	Ana	Braulio	Cecilia
Primero:	Yuri	nadie	Zoila
Segundo:	Zoila	Yuri	nadie
Tercero:	nadie	Zoila	Yuri

Sin ir más lejos, en las últimas elecciones presidenciales de USA de 2016 hemos visto cómo ganó un candidato de forma inesperada debido al protocolo de votación en varias fases. Si el protocolo hubiera sido distinto (por ejemplo, con voto ciudadano directo), habría ganado el otro candidato.

Pongamos otro ejemplo con estrategias de empresas. Hay dos fábricas de helados *A* y *B*, compitiendo en el mismo mercado. Hay una gama de clientes (uniformemente repartidos), que demandan distintas proporciones de leche en el helado. Supongamos que primero *A* decide la proporción de leche de sus helados y luego lo hace *B*. Ambos quieren maximizar el número de clientes. Se supone que un cliente decide comprar helados *A* o helados *B*, según el que esté más cerca de sus gustos personales.

Aquí también se puede hacer un razonamiento hacia atrás: supongamos que A decide fabricar helados con 20% de leche. Entonces B maximiza sus clientes si fabrica al 21%, ya que A se queda con 20% de clientes y B con el 80% (Figura 172).

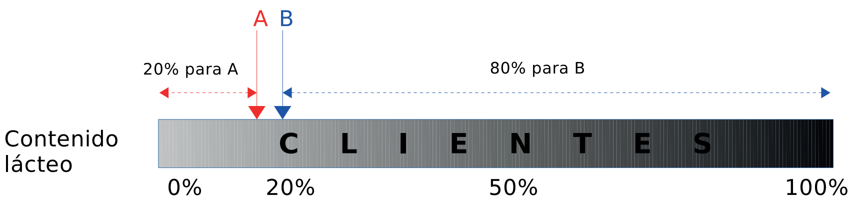

Figura 172. Dos marcas de helados

De ahí la empresa *A* puede deducir que su óptimo es fabricar al 50% de contenido lácteo. Entonces la respuesta óptima de *B* será fabricar con un porcentaje ligeramente mayor o con uno ligeramente menor. De esta forma, se reparten el mercado, la mitad para cada uno (Figura 173).

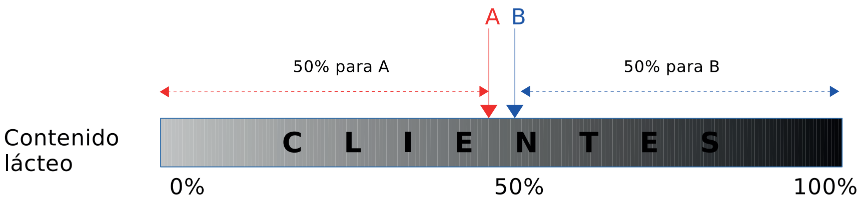

Figura 173. Dos marcas de helados con competencia óptima

El ejemplo puede hacerse más complicado suponiendo que aparece una tercera empresa *C* que comienza a preparar sus fábricas. *A* o *B* corren el riesgo de perder todos sus clientes si *C* se posiciona justo a su lado (Figura 174).

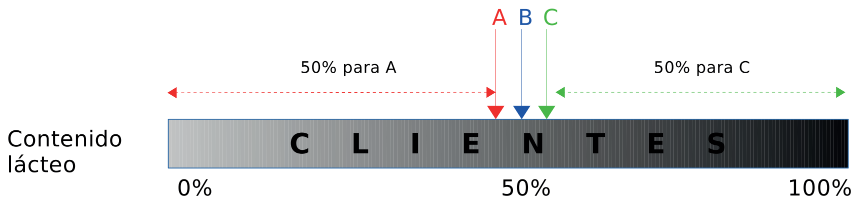

Figura 174. Aparece una tercera empresa

Dado que ambas empresas están en riesgo de perder todos sus clientes, lo que deben hacer es cambiar su estrategia alejándose del centro (Figura 175). De este modo, una empresa *C* que trate de introducirse, haga lo que haga, no conseguirá más del 25% del mercado.

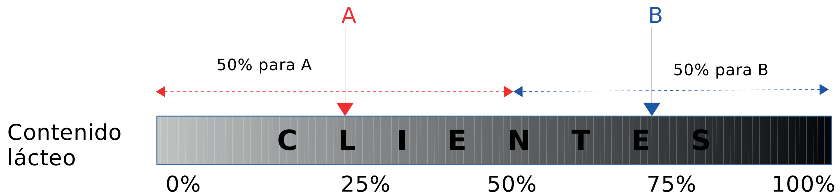

Figura 175. Nueva estrategia cuando una tercera empresa amenaza con competir

Un tercer ejemplo es el juego del triqui, también llamado tres en raya. En la figura 176 podemos ver un árbol parcial (el árbol completo es demasiado grande para dibujarlo aquí, pues consta de 9!=362 880 tableros). Se parte del tablero de 3x3 casillas vacías y se exploran todas las posibles jugadas del jugador rojo, y todas las posibles respuestas del jugador azul, y así hasta que lleguemos a un tablero donde haya un ganador (enmarcado en un círculo del respectivo color) o un empate (enmarcado con línea negra a trazos). Este árbol es similar al de la figura 177, pero mucho más grande. Y la idea es la misma: buscar si existe una forma de llegar a un tablero donde yo gane, que sea siempre alcanzable por mí, independientemente de lo que haga el otro jugador. En este juego se puede demostrar que no existe tal estrategia ganadora para ninguno de los dos jugadores, y lo máximo que pueden garantizar es empatar si ambos juegan correctamente.

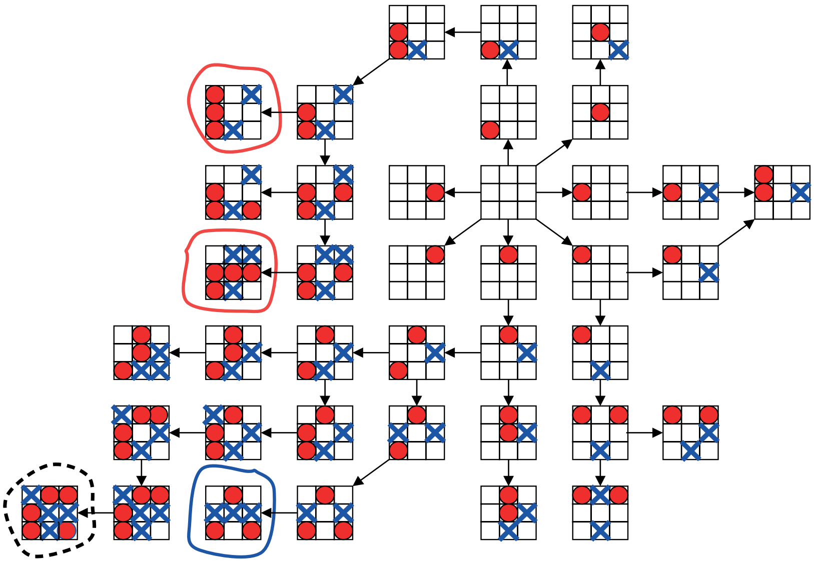

Figura 176. Árbol parcial del triqui

Una última forma de representar un juego es por su matriz de pagos, que también se llama forma normal o estratégica. Esto es particularmente útil cuando son solo dos jugadores, el número de jugadas es pequeño y se conoce cuánto gana y pierde cada jugador en función del resultado del juego. Un ejemplo es el jugo de niños "piedra, papel, tijera" donde hay dos jugadores que deben seleccionar simultáneamente (y sin que el otro lo vea) uno de estos tres objetos. La regla del juego es que la piedra gana a la tijera, la tijera al papel y el papel a la piedra. Entonces, su matriz de pagos viene dada en la figura 177. Los números en cada casilla indican lo que el jugador B debe pagar al jugador A.

Por ejemplo, si el jugador *A* elige piedra y el jugador *B* elige tijera, entonces *A* gana y ello implica que *B* debe pagar 1 (una moneda, un punto…) a A. Otro caso: si *A* elige piedra y *B* elige papel, entonces *B* debe pagar -1 a *A*, lo que se entiende como que es *A* el que debe pagar 1 a *B*.

		Jugador B		
		Piedra	**Papel**	**Tijera**
Jugador A	**Piedra**	0	-1	1
	Papel	1	0	-1
	Tijera	-1	1	0

Figura 177. Matriz de pagos para el juego piedra, papel, tijera

Antes de continuar, conviene también saber que hay dos tipos básicos de juego:

- **Estratégico** (o no-cooperativo). Cada jugador busca una estrategia óptima para sí mismo. Si hay solo dos jugadores, y lo que es bueno para un jugador es igual de malo para el otro. Se le llama juego estrictamente competitivo, o de suma cero, porque lo que gana uno lo pierde el otro.
- **Coalicional** (o cooperativo). Hay muchos jugadores. La teoría de juegos trata de modelar las posibles coaliciones que pueden surgir.

También se pueden clasificar así:

- **Con información perfecta.** Todos los jugadores conocen el estado pasado y actual del juego. Por ejemplo, en el ajedrez.
- **Con información imperfecta.** Justo lo contrario. Por ejemplo, el póquer debido a que cada jugador no puede ver las cartas del otro y a que el orden de las cartas del mazo depende del azar.

Entonces a partir de ahora nos vamos a centrar en juegos de dos jugadores, estratégicos y con información perfecta. En el ejemplo anterior, la matriz de pagos era de suma cero, pero en futuros ejemplos podría no ser así.

Veamos un ejemplo adicional con una matriz de pagos en un juego de suma cero que servirá para introducir el concepto de "dominancia", muy parecido a la dominancia de Pareto que hemos visto en el capítulo de algoritmos evolutivos. El jugador *A* elige una jugada entre $\{A_1, A_2, A_3\}$ y el jugador *B*, sin haber visto lo que hace A, elige otra entre $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Hechas las elecciones, *B* paga a *A* la cantidad indicada en la matriz de pagos de la figura 178:

		Jugador B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Jugador A	A_1	2	1	10	11
	A_2	0	-1	1	2
	A_3	-3	-5	-1	2

Figura 178. Matriz de pagos de juego de suma cero

Por ejemplo, si *A* elige A_3 mientras que *B* elige B_2, entonces *B* paga -5 a *A*. Es decir, *A* paga 5 unidades a *B*.

Sería genial saber de antemano cuál es la mejor jugada para cada jugador, y ello puede hacerse eliminando las filas y columnas dominadas, esto es, aquellas donde las puntuaciones que se obtienen son peores o iguales a las de otra fila o columna. *B* desea puntuaciones altas pues son los pagos que recibe. En ese sentido, observemos que cada una de las puntuaciones de la segunda fila son mayores o iguales a las de la tercera fila *(0≥-3, -1≥-5, 1≥-1 y 2≥2)*. Se dice que la estrategia A_2 domina a A_3, de modo que el jugador *A* siempre preferirá A_2 a A_3, independientemente de lo que haga el jugador *B*. Por eso, podemos tachar A_3.

Siguiendo el mismo método, vemos que A_1 domina a A_2, por lo que tachamos también A_2 y nos quedamos con una única jugada racional para el jugador *A*, que es A_1.

Por el contrario, el jugador *B* prefiere puntuaciones bajas (pues es lo que le corresponde pagar), y vemos que la columna B_2 domina a B_1 (ya que *1≤2, -1≤0 y -5≤-3*). Ningún jugador racional elegiría B_1, por lo que esa columna se puede eliminar.

De la misma manera vemos que B_2 domina a B_3 y que B_2 domina a B_4. La única jugada que queda para *B* es B_2.

Es importante entender que estas son las jugadas óptimas para cada jugador, independientemente de lo que haga el otro, y se les llama estrategias estrictamente dominantes (A_1 y B_2), por lo que podemos predecir que eso es lo que harán y el resultado será que *B* deberá pagar 1 unidad a *A*. También es importante entender que *A* tiene garantizado ganar al menos 1 unidad, y *B* tiene garantizado no perder más de 1 unidad. Cualquier jugador que elija una jugada distinta a estas obtendrá menos de lo garantizado.

Entonces, dada una matriz de pagos p_{ij} siendo *i* el índice de las filas y *j* el de las columnas, en general, si el jugador *A* elige la fila *i*, sabe que ganará al menos

$$min_j p_{ij} \qquad \text{Ec. 51}$$

Como puede elegir cualquier *i*, es natural que elija el que dé valor máximo

$$max_i min_j p_{ij} \qquad \text{Ec. 52}$$

De la misma manera, la mejor elección de *B* es la columna *j* que le da

$$max_j min_i - p_{ij} = -min_j max_i p_{ij} \qquad \text{Ec. 53}$$

Luego, *A* puede conseguir al menos

$$max_i min_j p_{ij} \qquad \text{Ec. 54}$$

y *B* le puede impedir que gane más de

$$max_i min_j p_{ij} \qquad \text{Ec. 55}$$

En el caso particular que se verifique que son iguales

$$max_j min_i p_{ij} = min_j max_i p_{ij} = p \qquad \text{Ec. 56}$$

Entonces al punto (i,j) cuyo valor es p se le llama **punto de silla**, y p es el valor del juego, o sea, lo que obtendrán si ambos juegan racionalmente (A obtiene p y B obtiene $-p$). La prueba de existencia del punto de silla es lo que se conoce como teorema del *minimax* y fue enunciado por John von Neumann en 1928. A los puntos de silla se les llama también **equilibrios de Nash**[45], pero este último concepto es más amplio pues abarca también a juegos de suma no cero y a juegos con estrategias mixtas, que veremos enseguida.

No vamos a entrar a estudiar las condiciones que impone el teorema del *minimax*, pero no siempre se dan. Por eso, en un juego puede haber más de un punto de silla pero también podría no haber ninguno y eso vuelve el juego mucho más interesante. Veamos por qué con un ejemplo (Figura 179).

Jugador A \ Jugador B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	3	4
A_2	4	2	5	6
A_3	0	1	2	1
A_4	1	2	2	3

Figura 179. Otra matriz de pagos

Una vez que eliminamos las filas dominadas (A2 y A3) y las columnas dominadas (B2 y B3), nos queda la matriz de pagos de la figura 180.

Jugador A \ Jugador B	B_1	B_2
A_1	1	3
A_2	4	2

Figura 180. Matriz de pago sin punto de silla

En este caso, ninguna columna domina a la otra y ninguna fila domina a la otra. Un análisis rápido diría que al jugador B le gustaría ganar esas *4* unidades para lo cual debe elegir B_2. Pero si el jugador A adivina sus intenciones,

45 Descubierto por el matemático John Forbes Nash.

entonces él elegirá A_2, con lo cual las ganancias de B serían solo de 2 unidades. Un razonamiento similar se puede hacer con las preferencias de A, que pueden ser adivinadas por B.

Resulta que se vuelve esencial poder predecir las intenciones del otro. Y ello no tiene nada extraño pues en el siguiente libro veremos que la predicción es el fundamento de la inteligencia.

Este juego lo va a ganar el más inteligente, el que pueda predecir mejor lo que va a hacer el otro. Pero, a la vez, debe evitar ser predicho por el otro y, para ello, necesita tener libertad de elección. Porque si un jugador no tiene libertad de elección, si su comportamiento es mecánico, entonces se puede predecir fácilmente lo que va a hacer. Esto tiene mucha relación con el concepto de libertad que veremos en el siguiente libro.

Si el juego se va a repetir muchas veces tiene sentido no elegir una jugada fija, sino seleccionar una al azar cada vez que se juega. A esto se le llama seguir una **estrategia mixta**, por contraposición con las **estrategias puras** que veíamos hasta ahora, donde las jugadas eran fijas sin tener que aleatorizar entre varias.

Cuando la estrategia es mixta queda por calcular con qué probabilidad elegir cada jugada, y eso es lo que vamos a ver a continuación[46]. Para ello supongamos que A elige A_1 con probabilidad r y A_2 con probabilidad $(1-r)$, mientras que B elige B_1 con probabilidad s y B_2 con probabilidad $(1-s)$. Entonces la esperanza matemática de A, o sea, lo que va a ganar A en promedio si se juega muchas veces, es:

$$\begin{aligned} E_A(r, s) &= -E_B(r, s) = 1\,rs + 3r(1-s) + 4(1-r)s + 2(1-r)(1-s) = \\ &= -4rs + r + 2s + 2 = \\ &= -4(r-1/2)(s-1/4) + 5/2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 57}$$

En la última línea se ha hecho una factorización astuta de términos que permite calcular fácilmente el resultado. Porque si A hace $r=1/2$ entonces queda $EA=5/2$, es decir, independientemente de lo que haga B, el jugador A puede garantizar que va a ganar $5/2$. De la misma manera, si B hace $s=1/4$ entonces $EB=-5/2$. Es decir, independientemente de lo que haga A, el jugador B puede garantizar que solo va a perder $5/2$.

Esto es lo que se conoce como equilibrio de Nash[47] con estrategias mixtas: cualquier jugador que se aparte de su estrategia óptima, suponiendo que el otro jugador no lo haga, y todos tengan información completa del juego, no logrará mejorar sus ganancias.

46 Las estrategias mixtas también pueden existir simultáneamente con estrategias puras.

47 Antes que Nash, von Neumann ya había llegado al mismo resultado para juegos de suma cero.

Es posible incluso que un juego tenga varios equilibrios de Nash y uno de ellos sea el óptimo global, es decir, que sea el mejor resultado para todos los jugadores[48]. Sin embargo, si se cayó inicialmente en otro equilibrio de Nash, no se podrá salir de allí a no ser que se realice una negociación por fuera del juego para poner de acuerdo a todos los jugadores, porque las maniobras de un solo jugador se traducirán en pérdidas para él.

Otro aspecto a considerar es cómo asegurarnos que elegimos las jugadas al azar, pues hay varios experimentos que muestran lo malos que somos los humanos para generar eventos estocásticos[49]. Cuando hay que usar estrategias mixtas no debemos confiar en nuestra capacidad para hacerlo, sino que es mejor lanzar monedas al aire u otro tipo de generador aleatorio. La esencia del proceso es, precisamente, que no sea posible para nuestro contrincante adivinar cómo va a caer nuestra moneda, de modo que no nos pueda predecir para sacar provecho.

Veamos otro ejemplo un poco más elaborado (Figura 181-a).

Jugador A \ Jugador B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-3	1	4
A_2	5	-3	2	3
A_3	1	1	2	2
A_4	6	5	1	3

(a)

Jugador A \ Jugador B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-3	1	4
A_2	5	-3	2	3
A_3	1	1	2	2
A_4	6	5	1	3

(b)

Jugador A \ Jugador B	B_1	B_4
A_1	1	4
A_2	5	3
A_3	1	2
A_4	6	3

(c)

Jugador A \ Jugador B		s	1-s
		B_1	B_4
r	A_1	1	4
1-r	A_4	6	3

(d)

Figura 181. Otra matriz de pagos más complicada

48 Estamos trabajando con solo 2 jugadores porque es más didáctico, pero todo ello es aplicable a juegos de muchos jugadores, solo que el análisis es más complicado.

49 Una anécdota: Claude Shannon creó un sencillo predictor de secuencias con una máquina de 8 estados y retó a un amigo suyo matemático a probarlo. El amigo debería generar una secuencia de ceros y unos, mientras que el *software* de Shannon trataba de predecirla. El *software* ganó, porque los humanos tendemos a repetir patrones. A continuación, Shannon mostró a su amigo cómo estaba hecho el *software* y después volvieron a jugar. El *software* volvió a ganar.

Aquí B_1 domina a B_2 y B_4 domina a B_3 por lo que podemos eliminar las columnas B_2 y B_3 (figura 181-b). Y entonces A_4 domina a A_3 y a A_2, por lo que podemos eliminarlas también (figura 181-c). Nos quedamos entonces con una matriz de pagos de 2x2, sin filas ni columnas dominadas (figura 181-d) en la que no hay puntos de silla, por lo que no hay estrategias fijas ganadoras. No obstante, se puede averiguar cuáles son las estrategias mixtas para cada jugador, asignando probabilidad r a jugar A_1 y probabilidad $(1-r)$ a jugar A_4 así como probabilidad s a jugar B_1 y probabilidad $(1-s)$ a jugar B_4. Entonces, si el juego se repite muchas veces, la esperanza matemática de A es:

$$\begin{aligned} E_A(r,s) &= -E_B(r,s) = 1rs+6(1-r)s+4r(1-s)+3(1-r)(1-s) = \\ &= rs+6s-6rs+4r-4rs+3-3r-3s+3rs = \\ &= -6rs+r+3s+3 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 58}$$

Se desea factorizar de la forma:

$$-6rs+r+3s+3 = a(r-b)(s-c)+d \qquad \text{Ec. 59}$$

que, desarrollando, queda:

$$a(r-b)(s-c)+d = ars-acr-abs+abc+d \qquad \text{Ec. 60}$$

Identificando términos, queda:

$$\begin{aligned} a&=-6 \\ -ac&=1 \\ -ab&=3 \\ abc+d&=3 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 61}$$

De donde sale:

$$\begin{aligned} a&=-6 \\ b&=1/2 \\ c&=1/6 \\ d&=7/2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. 62}$$

Insertando estos valores en la ecuación 59, queda:

$$E_A(r,s) = -E_B(r,s) = -6(r-1/2)(s-1/6)+7/2 \qquad \text{Ec. 63}$$

Entonces el jugador A puede garantizar que sus ganancias serán al menos *7/2* si hace $r=1/2$. Y el jugador B puede garantizar que sus pérdidas serán a lo sumo *7/2* si hace $s=1/6$.

Como conclusión, la estrategia mixta de A es jugar A_1 con probabilidad *1/2* y A_4 con probabilidad *1/2*, mientras que la estrategia mixta de B es jugar B_1 con probabilidad *1/6* y B_4 con probabilidad *5/6*.

A continuación explicaremos una nueva característica de la teoría de juegos. Si el juego es de suma cero, lo que un jugador gana es lo que el otro pierde. Pero si no es de suma cero, entonces en cada casilla de la matriz hay que especificar lo que cada jugador gana. Veámoslo con un ejemplo (Figura

182): aquí, si el jugador *A* elige A_3 y el jugador *B* elige B_2, entonces el pago será (1, 4) que significa que *A* ganará 1 y *B* ganará 4.

Jugador B

Jugador A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1, 2	-3, -4	1, 0	4, 3
A_2	5, 1	-3, 7	2, -1	-5, -3
A_3	1, 0	1, 4	2, 5	1, 0
A_4	6, 3	5, 1	1, 2	3, 1

Figura 182. Juego de suma no cero con tres equilibrios de Nash señalados en color verde

Ahora ya no podemos hablar de puntos de silla sino solo de equilibrios de Nash, y el algoritmo para encontrarlos es muy simple: para cada columna se busca el pago máximo para el jugador A y se verifica si el correspondiente pago para el jugador B es el máximo de esa fila. En caso de que lo sea, en esa casilla hay un equilibrio de Nash. En la figura anterior podemos observar que la matriz de pagos tiene tres equilibrios de Nash. Por ejemplo, (A_4, B_1) con pago *(6, 3)* es equilibrio de Nash porque $max_{COLUMNA1}\{1,5,1,6\}=6$ y $max_{FILA4}\{3,1,2,1\}=3$.

Sin embargo, en la columna 2 no hay ningún equilibrio de Nash porque el pago máximo para el jugador *A* es $max_{COLUMNA2}\{-3,-3,1,5\}=5$ que se da en la casilla (A_4, B_2) pero en ella el jugador *B* gana *1* que no es el $max_{FILA2}\{3,1,2,1\}=3$.

Los equilibrios de Nash se alcanzan en juegos de información perfecta donde cada jugador puede calcular cuáles son sus preferencias, y sabe que esos cálculos los estarán haciendo también los demás jugadores. Un jugador B muy primitivo podría querer jugar B_2 con la esperanza de ganar 7 puntos si *A* jugase A_2. Pero eso no va a ocurrir. Mientras que un jugador inteligente sabe que a *A* no le interesa jugar A_2, de modo que se centraría únicamente en los equilibrios de Nash.

De los tres equilibrios de Nash, ¿cuál es el que se elegirá? Todo va a depender de si hay comunicación entre los jugadores, si pueden negociar por fuera del juego, o si uno puede coaccionar al otro. Si el juego se repite muchas veces y no hay comunicación (por ejemplo, si el juego se juega entre bacterias o entre humanos con distinto idioma) entonces se llegará a algún equilibrio de Nash al azar. Y una vez allí, a nadie le conviene cambiar su jugada porque saldrá perdiendo. Pero si hay comunicación y posibilidad de negociar, a *A* le conviene (A_4, B_1) mientras que a *B* le conviene (A_3, B_3) y quizás lleguen al acuerdo de jugar (A_4, B_1) porque la ganancia total allí *(6+3=9)* es mayor que en el otro *(2+5=7)*. Incluso quizás convenga a *A* pagar algo a *B* por fuera del juego, para llegar a ese acuerdo. ¿Cuánto? Ese es otro juego que también podría analizarse.

Otro concepto todavía más interesante son las **estrategias evolutivamente estables**. Resulta que en sistemas evolutivos con una gran población de seres vivos compitiendo entre sí, los jugadores no se comunican ni negocian entre ellos, ni son conscientes de las alternativas óptimas de los otros. Además, habitualmente los genes imponen estrategias fijas a sus portadores. En este ambiente, las mutaciones producen, por así decir, los cambios de estrategia de cada jugador. Y sucede exactamente lo mismo que antes: puede haber varios óptimos, y el sistema quedará atrapado en cualquiera de ellos. En este ámbito biológico, algunos equilibrios de Nash son también estrategias evolutivamente estables. Es decir, son estrategias que —una vez adoptadas por la mayoría de la población— no se dejan invadir por otras estrategias mutantes. La selección natural mantiene la estabilidad. Este concepto fue acuñado por John Maynard Smith y George Price en 1973. Todas las estrategias evolutivamente estables son equilibrios de Nash, pero no al revés. La pequeña diferencia está en que a las estrategias evolutivamente estables se les exige también que el pago que recibe un jugador cuando el otro cambia de estrategia siga siendo mayor que cuando ambos cambian.

Cuando un juego se juega una sola vez, tiene sentido buscar los equilibrios de Nash. Pero estos no necesariamente son estables. Por tanto, si el juego se juega muchas veces, las jugadas óptimas vendrán dadas por las estrategias evolutivamente estables (ESS_Wiki, 2017).

Y cuando el juego es evolutivo, es decir, con poblaciones de agentes que difieren en pequeñas mutaciones, se suele plantear que todos los agentes son similares y cada estrategia corresponde a una mutación. En este caso, la matriz de pagos es simétrica. Veamos un ejemplo en la figura 183, donde podemos observar que hay dos equilibrios de Nash, marcados en color verde.

Jugador con mutaciones (columnas) / **Jugador** con mutaciones (filas)

	M_1	M_2	M_3	M_4
M_1	1, 1	7, 5	0, 1	3, 6
M_2	5, 7	7, 7	5, 1	1, 5
M_3	1, 0	1, 5	5, 5	3, 2
M_4	6, 3	5, 1	2, 3	2, 2

Figura 183. Matriz de pagos con una población de jugadores, jugando de 2 en 2

Los equilibrios de Nash se pueden definir también como aquellas estrategias M_N tales que:

$$E(M_N, M_N) \geq E(M_N, M_X) \text{ siendo } M_X \text{ cualquier otra estrategia} \qquad \text{Ec. 64}$$

En este caso, M_2 es un equilibrio de Nash porque lo que gana la estrategia M_2 contra sí misma es *7*, y si por mutaciones aparece otra estrategia M_X, la nueva ganaría menos de 7, por lo que el proceso de selección de la evolución la rechazará rápidamente.

De la misma forma, si en la población solo existiera la estrategia M_3, entonces se cumple que $E(M_3, M_3) \geq E(M_3, M_x)$, es decir, lo que gana al jugar contra sí misma es 5. Por otra parte, si aparece alguna mutación será rechazada porque la nueva ganaría menos de 5.

Para que una estrategia M_E sea evolutivamente estable debe cumplirse una de estas dos condiciones:

$$E(M_E, ME) > E(M_E, M_X)$$

o que:

$$E(M_E, M_E) = E(M_E, M_X) \text{ y } E(M_E, M_X) > E(M_X, M_X) \qquad \text{Ec. 65}$$

siendo M_X cualquier otra estrategia

La estrategia M_3 no es evolutivamente estable porque si aparece por mutación M_2, entonces M_3 gana lo mismo (5) jugando contra sí misma que contra M_2. Pero M_2 gana mucho más jugando contra sí misma (7) que contra M_3 (1). Por tanto, la mutación M_2 invadirá la población.

A su vez, M_2 sí es evolutivamente estable, es decir, no se deja invadir por otras mutaciones.

Como toda herramienta matemática, la teoría de juegos con sus matrices de pagos sirve para analizar situaciones con rigurosidad, eliminando las ambigüedades del lenguaje hablado. En el problema 2 vemos una situación de este tipo.

Problema 2: Dinero de bolsillo

Jorgito y Luisita apuestan a ver quién lleva menos dinero en su billetera. El ganador (el que lleve menos), se quedará con lo que lleve el otro. Si hay empate nadie se lleva nada del otro.

Parece algo sencillo y es de esperar que Jorgito razone así: “si yo tuviera más que Luisita, ella ganará todo lo mío. En cambio, si ella ha traído más que yo, ganaré más de lo que tengo. Es decir, lo que puedo perder es menos de lo que puedo ganar. ¡Yo llevo ventaja en este juego!”.

Luisita razona de manera análoga.

Pero entonces, ¿cómo pueden ambos jugadores llevar ventaja?

Sin embargo, también puede ocurrir al revés. Hay muchas situaciones aparentemente sencillas que se pueden modelar como juegos con su matriz de pagos, y que al final generan resultados inesperados, como un tipo de emergencia muy básico, donde interactúan pocos agentes, posiblemente solo dos. Vamos a ver a continuación algunos ejemplos.

Dilema del prisionero

En la figura 184 vemos la matriz de pagos del famoso dilema del prisionero, inventado por Dresher y Flood en 1950. La historia es la siguiente: la policía captura dos presuntos ladrones de un banco y los mete en celdas separadas, incomunicados entre sí. A cada uno le promete que lo dejará libre si confiesa el robo que acaban de cometer, y al otro le darán cinco años de cárcel si calla. Si ninguno confiesa, hay pruebas circunstanciales que permitirían meter a la cárcel a ambos durante dos años. Si los dos confiesan, entonces la policía no tendría problema en encarcelarles durante cuatro años a cada uno. En la figura, "confesar" es "traicionar" al otro, y "callar" es "cooperar" con el otro.

		Jugador B	
		Cooperar	Traicionar
Jugador A	Cooperar	-2, -2	-5, 0
	Traicionar	0, -5	-4, -4

Figura 184. Matriz de pagos del dilema del prisionero

El análisis es sencillo porque la fila con la jugada "traicionar" domina a "cooperar" para el jugador *A*, es decir, $0 \geq -2$ y $-4 \geq -5$. Además, la columna con la jugada "traicionar" también domina a "cooperar" para el jugador *B*, es decir, $0 \geq -2$ y $-4 \geq -5$, como vemos en la figura 185. Entonces las jugadas racionales para ambos jugadores son traicionar al otro y son estrategias estrictamente dominantes, por lo que conviene seguirlas independientemente de lo que haga el otro.

Recordemos que en teoría de juegos se supone que cada jugador busca egoístamente lo mejor para él mismo, y que la suerte del otro le da igual. No hay odio para el otro, pero tampoco hay ningún tipo de consideración.

		Jugador B	
		Cooperar	Traicionar
Jugador A	Cooperar	-2, -2	-5, 0
	Traicionar	0, -5	-4, -4

Figura 185. Las jugadas dominantes están en amarillo

Aquí se entiende la razón del nombre “dilema”, ya que lo que ambos van a obtener es una pena bastante alta, de 4 años de cárcel para cada uno. El óptimo global está en la casilla *(-2, -2)* donde ambos cooperan, pero como no pueden comunicarse ni hacer tratos o promesas entre ellos, la buena intención de cooperar de uno puede llevarle a algo peor, 5 años de cárcel, si el otro decide traicionar. Y ambos lo saben. De modo que ese óptimo global es inalcanzable. El egoísmo se impone y el resultado es malo para ambos.

Como es molesto trabajar con números negativos, se le puede sumar una constante a todos los pagos y el juego sigue siendo el dilema del prisionero. Esto es lo que hemos hecho en la figura 186.

		Jugador B	
		Cooperar	**Traicionar**
Jugador A	**Cooperar**	3, 3	0, 5
	Traicionar	5, 0	1, 1

Figura 186. Dilema del prisionero con todos los pagos positivos

De hecho, el juego es un dilema del prisionero siempre que tengamos una matriz como la de la figura 187 donde se cumpla:

$$T > R > P > S \qquad \frac{(T+S)}{2} < R \qquad \text{Ec. 66}$$

La segunda desigualdad evita que los jugadores se pongan de acuerdo en alternarse en traicionar y cooperar, y así ganar más que cooperando, cuando el juego se juega muchas veces.

		Jugador B	
		Cooperar	**Traicionar**
Jugador A	**Cooperar**	R, R	S, T
	Traicionar	T, S	P, P

Figura 187. Dilema del prisionero generalizado

En 1740, el filósofo David Hume adelantaba que incluso el individuo más egoísta puede descubrir que cooperar es la mejor solución a largo plazo. Pero ¿cómo lograrlo con esta matriz de pagos tan adversa? Pues resulta que si permitimos que los dos prisioneros se comuniquen es trivial que lleguen a un acuerdo de cooperar con lo cual ambos saldrían ganando. Pero si no pueden comunicarse, o no pueden firmar un contrato vinculante sobre el acuerdo que desean llevar a cabo, las matemáticas son inexorables y la única posibilidad para ambos es traicionarse.

En un programa de televisión donde se jugaba *Split or Steal*, un juego parecido al dilema del prisionero, podemos observar un ejemplo de negociación y engaño bastante espectacular (Spinout3, 2012).

Tragedia de los comunes

Este dilema fue ideado por William Foster Lloyd en 1833 para rebatir una conjetura del economista Adam Smith, y fue retomado por Garrett Hardin en 1968. Se cuenta así: unos campesinos pueden llevar cada uno tantas vacas como quieran a pastar a un prado comunal. Cada uno maximiza su ganancia llevando cada vez más y más vacas. Pero el resultado final es que el prado compartido acaba destrozado por sobreuso.

La conclusión a la que llegan es que los recursos comunes deberían ser administrados por una autoridad central.

Paradoja de Braess

Surge cuando hay un recurso común cuyo costo de uso se incrementa conforme aumenta el número de individuos que lo utilizan. Inicialmente, a cada individuo se le asigna un recurso al azar. Después, cada individuo puede cambiar al recurso que le es más barato, y entonces el costo para cada individuo, paradójicamente, puede aumentar. Esto sucede, por ejemplo, cuando modelamos el tráfico en una carretera o en Internet, como en la figura 188: hay agentes entrando a una red por el punto *A*, y el objetivo es salir por *D* eligiendo libremente la ruta.

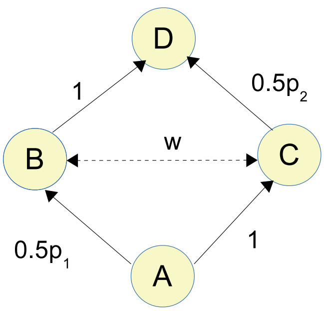

Figura 188. Circuito para la paradoja de Braess

Cada tramo de la ruta es un recurso que tiene un costo.

Hay rutas de costo constante, como *AC* y *BD*, y rutas de costo proporcional al porcentaje p de agentes que viajan por ellas.

Si la ruta *BC* no existiera, los costos de *ABD* y *ACD* serían iguales, por lo que la mitad de los agentes viajaría por cada ruta.

Parece lógico que al aumentar el número de rutas el costo total debe bajar, pero no es así: al añadir la ruta *BC* con costo $1/4<w<1/2$, todos los agentes elegirán egoístamente la ruta *ABCD*, cuyo costo por agente es ($1+w$), que es mayor que 1.25 (el costo cuando no existía *BC*).

Este problema no es solo teórico. En libros como el de Vanderbilt (2010) están documentados varios casos reales: al aumentar el número de autopistas a veces se fomenta la demanda, con lo que empeora la congestión.

Paradoja del votante

Cuando hay que participar en una votación, si acudes a votar te beneficias por el resultado de la votación. Pero si no acudes —dado que la población de votantes es muy grande— tu voto apenas cuenta, y entonces te beneficias más, pues el resultado no cambia pero no has gastado tu tiempo. Dicho con otras palabras: si muchos votan como yo, mi voto es superfluo, mientras que si pocos votan como yo, mi voto no vale para nada. Mi voto tiene importancia únicamente en caso de empate, pero la probabilidad de ello es insignificante. El problema de este tipo de razonamientos es que si todo el mundo hace lo mismo el sistema de votaciones deja de funcionar.

Otra paradoja ocurre en las votaciones con varias opciones *X, Y, Z*. Vamos a suponer que mis preferencias son $X>Y>Z$. Es habitual tener pensamientos como: "quisiera votar por *X*, pero como no va a ganar mi voto será inútil. Por ello, prefiero votar por *Y*, para que no gane *Z*". Esto se denomina "voto útil" pero en ocasiones tiene como consecuencia que si muchos piensan de ese modo, *X* perderá misteriosamente.

Señalización

En el caso del dilema del prisionero, y en muchos otros, sería útil poder indicar nuestras intenciones al otro jugador. A veces se puede hacer de forma verbal, o firmando contratos. Aunque a veces no, bien porque la comunicación no sea fiable si los agentes pueden mentir, bien porque ni siquiera haya comunicación, como en el caso del dilema del prisionero o en el caso de que los agentes sean animales o plantas sin posibilidad de comunicación verbal.

En muchos casos, para que surja la cooperación o para que cada uno encuentre su estrategia óptima, es necesario que los individuos sean capaces de reconocerse unos a otros o, más bien, de reconocer las intenciones de los demás y de dar a conocer las suyas.

A ese lenguaje no verbal que permite comunicar las intenciones de un agente a los otros se le conoce en biología como señalización. En teoría de juegos se mantiene tanto el término como su significado. Por ejemplo, en biología encontramos aves, como el pavo real, que desarrollan plumas de muchos colores para atraer pareja, indicando lo buenos padres que van a ser. Otros animales, entre ellos las ranas, desarrollan vivos colores para indicar a sus predadores que son venenosos. También hay crías de aves que pían mucho cuando tienen hambre. En los humanos ocurre la señalización cuando empleamos vestidos o adornos costosos para indicar nuestro estatus social.

La señalización es un sistema rudimentario de comunicación. Sin embargo, hay algo muy importante en ello: para que tenga éxito, para que sea creíble y no parezca el resultado de una técnica de engaño, quien señaliza debe gastar mucha energía e incluso poner en riesgo su vida. La señalización solo funciona si el mensaje que se envía es más valioso que el costo de falsificarlo.

Por ejemplo, cuando una cría de pájaro pía sin tener hambre, atrae también la atención de predadores, poniendo en riesgo su vida sin obtener a cambio ningún beneficio. Mientras que la cría que pía para llamar la atención de sus padres porque realmente tiene hambre, sí obtiene como beneficio la comida, es decir, evita la muerte por inanición. Eso significa que los genes de "piar sin tener hambre" van a encontrarse en menor proporción en la población de pájaros respecto a los genes de "piar teniendo hambre". Al generar un costo mayor en los individuos que mienten, la evolución va a presionar para que el mensaje diga la verdad.

En el caso del pavo real macho, las plumas llamativas y lo aparatoso de la cola también atraen a los predadores, por lo que el mensaje que envía a las hembras es algo así como "soy muy fuerte gracias a que tengo genes muy buenos, y si no fuera así, los predadores ya me habrían devorado". El mensaje es cierto porque el costo de engañar es alto. Los genes que producen colas llamativas y animales débiles dejaron de existir hace mucho.

Conviene aclarar que la señalización para mejorar la supervivencia, como la de las crías de pájaro, es un juego de dos (predador y presa), fácil de analizar. Por otro lado, la señalización cuyo objetivo es mejorar la reproducción, como el pavo real, es un juego de tres (macho, hembra y predador), bastante más complicado de analizar y en el que todavía quedan detalles en los que los biólogos no se ponen de acuerdo.

Las gacelas, que viven en manadas y dan grandes saltos sin moverse del sitio cuando ven un predador, están señalizando su fuerza para que el predador no las persiga a ellas y se centre en otras más débiles que no puedan saltar. En este caso la señalización es imposible de falsificar.

Sin embargo, realmente solo podemos hablar de probabilidades. Es poco probable que mensajes de señalización falsos prosperen. Pero entra dentro de lo posible —e incluso puede ser que matemática y biológicamente no haya otra alternativa—. Es lo que ocurre con las bandadas de pájaros (Dawkins, 1994) en las que algunos de ellos se quedan como centinelas en los árboles, encargados de alertar de peligros mientras los demás bajan al suelo a comer lombrices. El mensaje de señalización es el graznido que emiten cuando ven algún peligro. Si el mensaje fuera siempre falso, la bandada habría dejado de existir, devorada por predadores. Pero si siempre fuera cierto, los pájaros que se quedan como centinelas se morirían de hambre. La evolución encontró el equilibrio cuando estos animales emiten un 15% de sus avisos falsos.

Las serpientes coral son venenosas y tienen unos vivos anillos de color con los que alertan a sus predadores para que las dejen tranquilas. Los predadores que no tienen genes para entenderlo así morirán con bastante probabilidad, eliminando esos genes (que no relacionan el color con el peligro) de la población. Aquí se puede ver que la señalización es un protolenguaje, con un emisor y un receptor que se han puesto de acuerdo en el contenido (veneno), a lo largo de la evolución por generaciones, mientras que las formas son irrelevantes (color), producto de algún accidente.

Con el tiempo, otras serpientes logran desarrollar anillos de colores similares sin tener que invertir en la fabricación más costosa del veneno. Son las falsas corales, que han conseguido falsificar ese tipo de señalización porque el costo de hacerlo era favorable (protegerse de depredadores).

Es decir, que asociado a una señalización también suele surgir después el engaño. Y si el engaño se generaliza, se hace fácil de realizar y se extiende a toda una población, entonces la señalización se destruye.

Se piensa que los lenguajes humanos también comenzaron como formas de señalización.

En economía se han planteado varios escenarios donde la señalización es útil. Uno de ellos es el juego de la reputación que ilustraremos detalladamente con el siguiente ejemplo: el jugador A es un vendedor que monopoliza su sector y que gana así 7 millones. El jugador *B* amenaza con entrar al mercado a vender lo mismo, pero sabe que gana 1 millón si no entra. Si *B* decide entrar, el jugador *A* puede hacer dos cosas:

- Inundar el mercado con sus productos de modo que ambos ganen 0.
- Repartirse a medias un mercado que va a resentirse bastante. Concretamente, *A* ganará 2 y *B* ganará 2.

Podemos ver el juego en su forma extensa en la figura 189. Se trata de un juego no competitivo, por lo que la puntuación de cada jugador es independiente de la del otro. A ambos solo les interesa maximizar la propia puntuación.

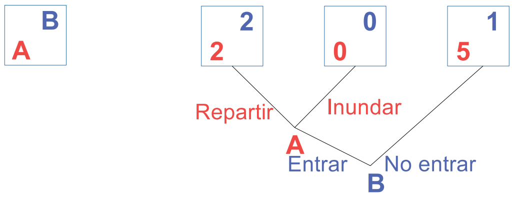

Figura 189. Juego de la reputación en forma extensa

En la figura 190 lo hemos convertido a su forma normal.

Está claro que las puntuaciones de "repartir" dominan a las de "inundar" para el jugador *A*. Por tanto, el jugador *B* no percibe "inundar" como una seria amenaza y lo racional es que se arriesgue a jugar "entrar".

Jugador A \ Jugador B	No entrar	Entrar
Repartir	1 / 5	2 / 2
Inundar	1 / 5	0 / 0

Figura 190. Matriz de pagos del juego de la reputación

Sin embargo, el jugador *A* puede señalizar su intención irrevocable de jugar "inundar" haciendo un fuerte gasto previo al juego, o sea, añadiendo una nueva jugada. Lo puede lograr haciendo una inversión irreversible para aumentar su capacidad de producción. Esto conlleva para *A* una pérdida de 2 millones que se restan sobre lo previsto en el caso anterior si no utiliza esta capacidad extra. La única oportunidad de utilizar la capacidad extra es luchar contra *B* si se decide a entrar, en cuyo caso ganará 1 millón, en vez de 0, porque la capacidad extra abaratará su producción que inundará el mercado. Las ganancias de *B* no cambian. El nuevo árbol de decisiones lo vemos en la figura 191.

La matriz de pagos queda entonces como se indica en la figura 192. Si el jugador *A* hace el gasto fuerte, es decir, si emite la señalización, el resto del juego se desarrollará en la mitad de abajo de la matriz de pagos. Entonces, la fila "gasto fuerte e inundar" es dominante para el jugador *A*, por lo que esa será su jugada racional, y el jugador *B* lo sabe. Ante esas condiciones, la jugada racional de *B* es "no entrar".

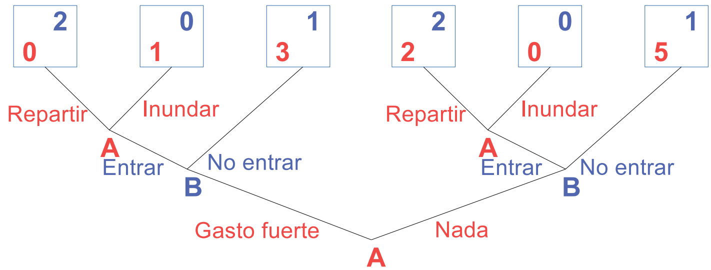

Figura 191. Señalización en el juego de la reputación, en forma extendida

Jugador B

Jugador A	No entrar	Entrar
Nada y Repartir	5, 1	2, 2
Nada e Inundar	5, 1	0, 0
Gasto fuerte y Repartir	3, 1	0, 2
Gasto fuerte e Inundar	3, 1	1, 0

EN EL CASO DE QUE HAYA SEÑALIZACIÓN

Figura 192. Matriz de pagos del juego de la reputación con señalización

Ahora podemos entender con cifras concretas lo que significa que una señalización sea creíble. Si el jugador *A* se limita a anunciar en los periódicos que va a inundar los mercados, pero sin realizar ninguna inversión previa, eso no es creíble pues nos lleva de nuevo a la figura 190.

Resumen

Hemos visto que la teoría de juegos se encarga de analizar matemáticamente las interacciones entre distintos agentes (humanos, animales, software), buscando la jugada óptima de cada uno. Se abordaron varias clasificaciones y cómo expresar los juegos en forma de árbol o en forma de matriz de pagos. En este último caso se pueden descartar las jugadas dominadas de cada jugador y si ello conduce a una única jugada, se la llama estrategia estrictamente dominante donde se gana más con ella, independientemente de lo que haga el otro jugador. En el dilema del prisionero, cada jugador tiene una estrategia estrictamente dominante, que es traicionar al otro. Cuando esto ocurre, se dice que es una estrategia pura. Pero en el caso de que al eliminar todas las jugadas dominadas queden varias (dos o más), entonces habrá que elegir al azar entre ellas, con una probabilidad para cada jugada que puede ser calculada fácilmente. Aleatorizar entre varias jugadas es lo que se conoce como estrategia mixta.

Luego definimos los equilibrios de Nash como aquellas jugadas donde a cada jugador no le conviene cambiar porque saldría perdiendo si todos los demás jugadores se mantienen en su jugada. Son, por así decir, óptimos locales. Solo se puede salir de ellos si los jugadores se ponen de acuerdo en cambiar de jugada todos a la vez, lo cual requiere procesos de negociación externos al juego.

Y también vimos las estrategias evolutivamente estables, cuya definición es casi idéntica a los equilibrios de Nash. Todas estas definiciones son muy parecidas e incluso se han ido afinando bastante recientemente, por lo que aún persisten algunos errores en ciertos medios (Talwalkar, 2016).

Después se presenta el dilema del prisionero como un juego aparentemente competitivo y que lleva inevitablemente a la traición, cuando se juega una sola vez o cuando no hay suficiente inteligencia en los jugadores. Pero si se juega muchas veces y los jugadores disponen de un mínimo de inteligencia (memoria para reconocer al adversario y las jugadas pasadas) entonces emerge la cooperación que, aunque no es estable en todas las circunstancias, sí es bastante robusta. Este ambiente inteligente es el que suele darse cuando hay evolución, por lo que la cooperación requiere aproximadamente la misma complejidad que la evolución.

Para terminar se muestran otras paradojas y cómo emerge la comunicación en su forma más primitiva, es decir, la señalización. Y con ella, el engaño.

Para saber más

- Robert Wright (2001). *Non Zero. The logic of human destiny*. New York: Vintage Books.

Un libro algo especulativo acerca del destino que le espera a la humanidad. Sin embargo, lo recomiendo porque muestra muchos ejemplos reales de juegos de suma no-cero. La tesis del autor es que a través de estos juegos la humanidad evolucionó mejorándose cada día más. La mayoría de los juegos sociales en que intervenimos son de suma no cero, es decir, todos los jugadores pueden ganar a la vez. Solo con ello ya estaría asegurada la mejora continua de la sociedad. Lo malo es que también hay juegos de suma cero (como repartirse una cosecha, pues lo que uno gana es lo que otro pierde), pero para evitar problemas la misma sociedad ha desarrollado herramientas que empujan a la cooperación o, al menos, evitan el abuso. Estas herramientas son las leyes, las religiones y las costumbres.

Además explica las mayores transiciones, desde las tribus de la edad de piedra, el cacigazgo, los reinos medievales y los estados actuales (quién sabe que venga después). Muchas de estas transiciones fueron apoyadas por descubrimientos o invenciones tecnológicas, como la agricultura (con la que comienza el capitalismo, pues es posible acumular algo precioso), la escritura (que permite guardar la historia, escribir contratos o no perder futuros hallazgos científicos, artísticos o tecnológicos, lo que da lugar a los sistemas educativos modernos) en varias fases (primitiva sobre una variedad de materiales, la imprenta automatizada y los medios electrónicos que culminan con Internet) y la revolución industrial, seguida de la revolución de la información.

- Mark van Vugt y Anjana Ahuja (2012). *Naturalmente seleccionados.* São Paulo: Editora Cultrix.

Algunos temas del libro anterior se explican aquí desde otra óptica: no debe haber genes de liderazgo (ya que ello implica tomar riesgos) sino de "seguidazgo" que son más útiles (repetir lo que otros han hecho con éxito). Las pocas personas que tienen versiones débiles de estos genes son los más propensos a ser líderes. Además, el texto muestra las características, retos, ventajas e inconvenientes de ser líder en las distintas sociedades humanas (tribus, cacicazgos, reinos y estados).

Referencias

Libros, artículos y enlaces web

Ariely, D. (2008). *Predictably Irrational: The Hidden Forces That Shape Our Decisions*. USA: Harper Collins.

Binmore, K. (1994). *Teoría de juegos*. Madrid: McGraw Hill.

Corning, P. A. (2004). The evolution of politics. *In Handbook of Evolution, 1*. Wemheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.

Dawkins, R. (1994). *El gen egoísta*. Barcelona: Salvat.

Dugatkin, L. A. y Reeve, H. K. (1998). *Game Theory and Animal Behaviour*. Oxford: Oxford University Press.

ESS_Wiki (2017). Evolutionary Stable Strategy. Wikipedia. Recuperado el 18 de agosto de 2017. Disponible en: https://goo.gl/r3RVyG

Kaneko, M. (2005). *Game Theory and Mutual Misunderstanding*. Berlin: Springer.

Maynard, J. y Price, G. R. (1973). The Logic of Animal Conflict. *Nature*, 246(5427), pp. 15–8. DOI: https://dx.doi.org/10.1038/246015a0

Monsalve, S. y Arévalo, J. (2005). *Un curso de teoría de juegos clásica*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Nash, J. F. (1951). Non-Cooperative Games. *The Annals of Mathematics*, 54, pp. 286-295. DOI: https://dx.doi.org/10.2307/1969529

Shubik, M. (1982). *Teoría de juegos en las ciencias sociales*. México: Fondo de Cultura Económica.

Talwalkar, P. (2016). *SciShow Incorrectly Explains The Nash Equilibrium. Game Theory Tuesdays*. Recuperado el 11 de agosto de 2017. Disponible en: https://goo.gl/w7Wbr9

Vanderbilt, T. (2010). *Tráfico*. Barcelona: Random House Mondadori.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. United States: Princeton University Press.

Películas y videos

Spinout3 (2012). *Golden Balls. The weirdest split or steal ever!* Recuperado el 26 de agosto de 2017. Disponible en: https://goo.gl/63f6AV

Tesis y trabajos de grado en EVALAB

Hoyos, J. D. (2009). *Objeto virtual de aprendizaje para la teoría de juegos*. Cali: Universidad del Valle.