Capítulo 8

SOLUCIÓN A PROBLEMAS DE INGENIO

Lástima que hayas tenido que llegar hasta aquí. Pero no te preocupes, que no se lo diremos a nadie.

Las 12 monedas

Recuerdo que este problema me lo contó el profesor Alfons Crespo, de la Universidad Politécnica de Valencia. Lo primero que uno intuitivamente piensa es en dividir las monedas en dos grupos de seis, y poner un grupo en cada platillo. Pero, a poco que reflexiones, te darás cuenta que esa medida prácticamente no da información. Uno de los platillos va a pesar más que el otro, inevitablemente. O sea, que no hemos averiguado nada que no supiéramos desde el principio.

La solución está en dividir las monedas en tres grupos de cuatro. Un grupo se deja sobre la mesa y los otros dos se llevan a los respectivos platillos de la balanza. Si, por ejemplo, los dos platillos pesan igual, entonces la moneda falsa está sobre la mesa y nos podemos centrar en averiguar cuál es de entre cuatro posibles. Este tipo de medida sí nos da mucha información.

Claro que también puede ocurrir que la balanza se incline hacia un lado. Eso, de todos modos, nos permite descartar las cuatro monedas que quedaron sobre la mesa.

Como hay varios casos que tratar, he diseñado este diagrama (Figura 109) para cubrirlos todos. En el lado izquierdo aparecen las doce monedas que se pueden situar en tres sitios, donde “M” (o blanco) significa la mesa, “I” significa el platillo izquierdo y “D” el derecho.

Cada una de las tres pesadas (en las siguientes tres columnas) pueden arrojar tres resultados: “I>D” significa que el platillo de la izquierda pesa más que el de la derecha; “D>I” es la situación inversa; y “I=D” es cuando ambos pesan igual. En la siguiente columna, en amarillo, está el resultado. Concretamente, el número de la moneda falsa y si pesa más (indicado con “+”) o menos (“-”) que las demás. Las dos siguientes columnas ofrecen información adicional sobre el proceso.

El total de bits de información que nos arroja este sistema es $Log_2(2*12)=4.58496$ bits. Y en cada pesada se obtiene aproximadamente un tercio de esta cantidad, es decir, 1.52832 bits. O sea, casi 1 *trit* (definiendo *trit* como la información que se obtiene al hacer una pregunta que tiene tres respuestas equiprobables). No se alcanza el *trit* porque hay tres casos imposibles, como se ve en la figura.

Es decir, como hay tres preguntas (las tres pesadas) y cada una puede dar tres respuestas, entonces hay $3^3=27$ resultados posibles. Pero como solo hay 24 casos (cada una de las 12 monedas puede pesar más o menos que las demás), entonces hay 27-24=3 casos imposibles.

Monedas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Pesada 1	Pesada 2	Pesada 3	SOLUCIÓN	CONOCIMIENTO antes de la jugada	Incertidumbre
I	I	I	I	D	D	D	D	M	M	M	M					no sabemos nada	24/24
I	I	D	D	D	I	M	M					I > D				1+ or 2+ or 3+ or 4+ or 5- or 6- or 7- or 8-	8/24
							I	I	D	D	M	I = D				9+ or 9- or 10+ or 10- or 11+ or 11- or 12+ or 12-	8/24
I	I	D	D	D	I	M	M					D > I				1- or 2- or 3- or 4- or 5+ or 6+ or 7+ or 8+	8/24
I	D			M								I > D	I > D			(1+ or 2+ or 3- or 4- or 5- or 6+) and B => 1+ or 2+ or 5-	3/24
						M	I	D				I > D	I = D			(7+ or 7- or 8+ or 8-) and B => 7- or 8-	2/24
		I	D		M							I > D	D > I			(1- or 2- or 3+ or 4+ or 5+ or 6-) and B => 3+ or 4+ or 6-	3/24
								M	I	D		I = D	I > D			(8+ or 9+ or 10- or 11-) and C => 9+ or 10- or 11-	3/24
										I	D	I = D	I = D			(12+ or 12-) and C => 12+ or 12-	2/24
								M	I	D		I = D	D > I			(8- or 9- or 10+ or 11+) and C => 9- or 10+ or 11+	3/24
		I	D		M							D > I	I > D			(1+ or 2+ or 3- or 4- or 5- or 6+) and D => 3- or 4- or 6+	3/24
						M	I	D				D > I	I = D			(7+ or 7- or 8+ or 8-) and D => 7+ or 8+	2/24
I	D			M								D > I	D > I			(1- or 2- or 3+ or 4+ or 5+ or 6-) and D => 1- or 2- or 5+	3/24
												I > D	I > D	I > D	1 +	1+	1/24
												I > D	I > D	I = D	5 -	5-	1/24
												I > D	I > D	D > I	2 +	2+	1/24
												I > D	I = D	I > D		imposible	
												I > D	I = D	I = D	7 -	7-	1/24
												I > D	I = D	D > I	8 -	8-	1/24
												I > D	D > I	I > D	3 +	3+	1/24
												I > D	D > I	I = D	6 -	6-	1/24
												I > D	D > I	D > I	4 +	4+	1/24
												I = D	I > D	I > D	11 -	11-	1/24
												I = D	I > D	I = D	9 +	9+	1/24
												I = D	I > D	D > I	10 -	10-	1/24
												I = D	I = D	I > D	12 -	12-	1/24
												I = D	I = D	I = D		imposible	
												I = D	I = D	D > I	12 +	12+	1/24
												I = D	D > I	I > D	10 +	10+	1/24
												I = D	D > I	I = D	9 -	9-	1/24
												I = D	D > I	D > I	11 +	11+	1/24
												D > I	I > D	I > D	4 -	4-	1/24
												D > I	I > D	I = D	6 +	6+	1/24
												D > I	I > D	D > I	3 -	3-	1/24
												D > I	I = D	I > D	8 +	8+	1/24
												D > I	I = D	I = D	7 +	7+	1/24
												D > I	I = D	D > I		imposible	
												D > I	D > I	I > D	1 -	2-	1/24
												D > I	D > I	I = D	5 +	5+	1/24
												D > I	D > I	D > I	2 -	1-	1/24

Figura 109. Solución al problema de las 12 monedas

¿Cuál es el sistema más complejo?

Respuesta: (c). Como veremos a lo largo del capítulo, hay muchas formas de medir la complejidad, pero lo intuitivo aquí es tratar de describir la sala de cómputo con palabras. Podemos nombrar los computadores de izquierda a derecha y de arriba a abajo así: A, B, C, D, E y F. Entonces las más simples son la sala (a) y la sala (d), la siguiente la (b) y la siguiente la (c). Podría parecer que la más compleja es la sala (d) porque tiene más conexiones, pero ello no es así.

(a) Son 6 computadores todos desconectados.

(b) Son 6 computadores. Está conectado A con B.

(c) Son 6 computadores. Están conectados A con C; A con E; B con C; B con D; B con E; B con F; C con D; C con E; D con E; y D con F.

(d) Son 6 computadores conectados todos con todos.

Algoritmo descriptor

La primera secuencia (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19) es trivial, son los primeros 10 números impares.

La segunda secuencia (1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5) es un poco más difícil: son las 10 primeras cifras decimales del número $\pi = 3{,}1415926535...$

La tercera secuencia (0, 5, 4, 2, 9, 8, 6, 7, 3, 1) es bastante difícil, especialmente para ingenieros, científicos o matemáticos: son los números del 0 al 9 escritos lexicográficamente y puestos en orden alfabético. Es decir:

Cero
Cinco
Cuatro
Dos
Nueve
Ocho
Seis
Siete
Tres
Uno

Quizás aquí nos damos cuenta que hay demasiados algoritmos a considerar, para intentar expresar una secuencia de la manera más corta posible. Encontrar el más corto depende de la inteligencia del programador, y no hay una forma automática de lograrlo, ni de garantizar que no haya una descripción todavía más corta.

El bar "El Farol"

Todos los participantes son iguales, en el sentido de que están sometidos a las mismas reglas del juego y usan el mismo algoritmo. Lo interesante aquí es que si el algoritmo es determinista, entonces está garantizado que no encuentran la solución, incluso obtienen el peor resultado posible. De modo que es necesario emplear algoritmos aleatorios. El determinismo suele servir para solucionar problemas sencillos. Mientras que para solucionar problemas complejos se requiere una inteligencia distinta, que incorpore aleatoriedad, es decir, que tenga libertad de decisión. Y ese es el tema que estamos hablando en el capítulo "Libertad" y al que volveremos en más en detalle cuando hablemos de **estrategias mixtas**, en el capítulo "Teoría de Juegos".

En Arthur (1994) se plantea este juego y se propone una forma computacional de resolverlo, jugando muchas veces y usando un conjunto diverso de predictores, eligiendo de entre ellos el que mejor se vaya aproximando a una buena solución. El resultado, que podría haberse obtenido también usando algoritmos evolutivos, es muy simple: cada participante debe lanzar al aire una moneda sesgada con un 60% de probabilidad de que salga cara. Si sale cara debe ir al bar y, en caso, contrario, debe quedarse en casa. Eso asegura que, en promedio, cada viernes, el 60% de la población vaya al bar.

Teorema de la amistad

La solución es N=6 personas. Para demostrarlo primero veamos contraejemplos para N=3, N=4 y N=5 en la figura 110 donde los nodos representan las personas y los arcos representan la relación: {rojo=no se conocen, verde=se conocen}.

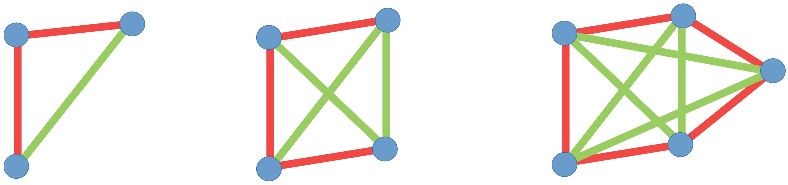

Figura 110. Fiestas con 3, 4 y 5 personas, que no cumplen el teorema de la amistad

Para N=6 elijamos un nodo de cualquiera que vamos a llamar A. De allí salen 5 arcos a los demás nodos. Al menos 3 arcos deben de ser del mismo color, que vamos a suponer verde sin pérdida de generalidad. Esos 3 arcos terminan en 3 nodos que vamos a llamar B, C y D. Si alguno de los arcos BC, BD o CD es verde (Figura 111-a), ya tenemos un triángulo verde, lo que significa que hay 3 personas que se conocen entre sí. Pero si ninguno de los arcos BC, BD y CD es verde, entonces los tres arcos son rojos (Figura 111-b), lo que significa que B, C y D no se conocen entre sí. QED.

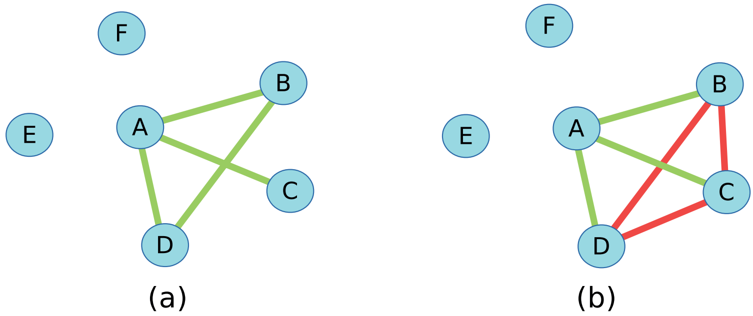

Figura 111. Dos casos en los arcos BC, CD y BD: (a) al menos hay un arco verde; (b) no hay ningún arco verde

Galletas para todos

El valor mínimo es N=44. La demostración se hace por inducción:

Primero, supongamos que ya sabemos cuál es ese valor N. Entonces, si nos llega un pedido de N+1 galletas lo podremos atender eliminando una caja de 20 y añadiendo cajas de 9, 6 y 6 galletas, así:

N+1 = N+9+6+6-20

La notación aquí es así:

- En el lado izquierdo de la igualdad, "+X" significa sumar X galletas.
- En el lado derecho de la igualdad, "+X" significa añadir una caja de X galletas, lo cual también es una suma de galletas. Y "-X" significa eliminar una caja de X galletas, lo cual también es una resta de galletas.

De la misma manera para pedidos de cantidades sucesivas:

N+2 = N+20-9-9

N+3 = N+9-6

N+4 = N+6+6+6+6-20

N+5 = N+20-6-9

N+6 = N+6

En este momento no es necesario continuar hasta N+∞ porque lo que nos dice la última fórmula es que si sabemos empacar N galletas, para lograr empacar N+6 simplemente se requiere añadir una caja de 6. Por tanto, a partir de aquí es repetir lo mismo, sustituyendo N por N+6. Por ejemplo:

N+7= (N+6)+1 = (N+6)+9+6+6-20

Para terminar, hay que determinar qué valor de N permite hacer esto. Debe ser un N al cual se le puedan quitar cajas de 20, 9, 9 y 6, lo cual suma 20+9+9+6=44.

Por tanto, el pedido a partir del cual se pueden atender todos los demás es N=44. QED.

Acertijo MU

Para llegar a la solución hay que buscar algún método por el que podamos obtener el resultado en un tiempo finito. Es lo que se llama un proceso de decisión o, en términos computacionales, un algoritmo. Si pensamos en programación, tendríamos que construir un programa que aplique todas las reglas posibles a MI y a todas las verdades que vaya generando, hasta lograr convertirla en MU. Pero si lo hacemos, nos daremos cuenta de que el programa no para. Pasa el tiempo días, años, milenios, y el programa no se detiene. No encuentra la solución. Entonces uno se pregunta si MU es falso, o bien si MU es verdadero pero su demostración es muy compleja.

Puedes intentar hacerlo con papel y lápiz. O, mejor aún, escribiendo tu propio programa. Pero pasado un cierto tiempo verás que no logras deducir MU de MI. ¿Eso es debido a que no has tenido suficiente paciencia y debes explorar más?

La solución a este problema no se logra aplicando las reglas. Hay que analizar las reglas y saltar afuera del sistema, creando otro distinto. Veamos como:

La "M" es irrelevante. Nunca se quita ni se pone ni se modifica.

El número de "I" solo lo podemos aumentar usando la regla 2, duplicando la cantidad.

El número de "I" solo lo podemos disminuir por múltiplos de 3 (usando la regla 3). Por tanto, para eliminar todas las "I" tenemos que conseguir que aparezca un múltiplo de 3 veces.

Un número que no es divisible por 3, sigue sin serlo después de multiplicarlo por 2 (si usamos la regla 2).

Un número que no es divisible por 3, sigue sin serlo después de restarle 3 varias veces (si usamos la regla 3).

Además, 1 (el axioma inicial tiene 1 "I") no es divisible por 3.

Resumiendo, para que el problema tuviera solución se necesita alcanzar un número de "I" que sea potencia de 2 y divisible por 3, lo cual es imposible.

O sea, no existe un n tal que $n=2^a$ y $n=3*b$ siendo n, a, b números naturales

De ahí se deduce que MU no es alcanzable a partir de MI, aplicando las reglas. Es decir, MU no es un teorema del sistema, o sea, no es una verdad del sistema. Sin embargo, no podemos deducirlo usando únicamente el sistema de reglas inicial.

Se sospecha que puede pasar lo mismo con algunas de las conjeturas de las matemáticas. Por ejemplo, la conjetura de Goldbach dice que todo número par mayor que 2 es suma de dos primos. Podemos construir un programa que lo verifique, por ejemplo:

$$
\begin{array}{c}
4=2+2 \\
6=3+3 \\
8=3+5 \\
10=5+5 \\
12=5+7 \\
14=7+7 \\
16=5+11 \\
\textit{Etcétera.}
\end{array}
\qquad \text{Ec. 39}
$$

Pero hasta ahora no se ha logrado ni un contraejemplo ni una demostración para la conjetura de Goldbach.

Dos autoreferencias divertidas

Las dos autorreferencias fueron tomadas del libro *Gödel, Escher, Bach: un grácil e infinito bucle*, de Douglas Hofstadter (1979).

Para que diga la verdad, la frase debe de ser: "*Esta frase contiene cuarenta y siete caracteres*". Por cierto que no hace falta tener un PhD. en Matemáticas para inventar estas cosas. Entre La Pintada y el Alto de Minas, en Colombia, hay un bar de carretera que se llamaba "*Estadero veintiséis letras*".

La siguiente frase quisiera decir de sí misma "*Esta frase no tiene verbo*", pero en ese caso estaría mintiendo. Para decir la verdad no le queda otra alternativa que suprimir su propio verbo.

El barbero de Sevilla

Es una versión más elaborada de la afirmación de Epiménides el cretense, por lo que no se puede saber la respuesta. Si suponemos que sí, el enunciado nos dice que no. Y si suponemos que no, el enunciado nos dice que sí. En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo que la pregunta del enunciado es indecidible, de manera similar a cómo no se estabiliza la señal digital de una puerta *NOT* cuando se conecta su entrada a su salida.

Paradoja de Richard

La paradoja de Richard en la variante para números enteros está mal entendida. Veamos por qué:

Se listan todas las propiedades de los números enteros y se ordenan lexicográficamente. Después se calcula el conjunto de números que cumplen con esa propiedad. Por último, se mira si el número de orden está dentro de ese conjunto (y entonces se le llama no-Richardiano) o no (y entonces se le llama Richardiano).

Tabla 2. Lista de números Richardianos y no-Richardianos

Número	Propiedad	Conjunto de números que cumplen con la propiedad	¿Richardiano?
1		C_1	
2		C_2	
...			
R	No cumplir con la propiedad que representa	C_R= ?	?
...			
17	No ser divisible por ningún otro entero excepto por la unidad y por él mismo	Los primos: C_{17}={2,3,5,7,11,13...}	NO
...			
22	Ser producto de un entero por sí mismo	Los cuadrados: C_{22}={1,4,9,16,25,36...}	SÍ
...			

El problema radica en que los conjuntos de números que cumplen con la propiedad enunciada son estáticos, excepto para la propiedad R, en que depende de R.

Es decir, no existe la lista de números no-Richardianos, porque depende de la propiedad que representen. Por ejemplo, para la propiedad 17 del ejemplo anterior, la lista de números no-Richardianos es {2,3,5,7,11,13...}. Y para la propiedad 22 es {1,4,9,16,25,36...}

Es decir, no existe un conjunto de números estático para la propiedad R, de modo que esa propiedad no está bien definida.

Por otro lado, se encuentra frecuentemente una argumentación errónea (RP_Wiki, 2017; Hofstadter, 1979), que dice más o menos así:

Supongamos que R es Richardiano. Entonces no debe cumplir con la propiedad que representa. Por tanto R es no-Richardiano.

La tercera afirmación no sé de dónde la sacan. Es coherente que R sea Richardiano y no cumpla con su propiedad.

Y luego siguen:

Supongamos que R es no-Richardiano. Entonces debe cumplir con la propiedad que representa. Por tanto R es Richardiano.

De nuevo, la tercera afirmación no sé de dónde la sacan. Es coherente que R sea no-Richardiano y cumpla con su propiedad.

La indecibilidad no viene por contradicción, sino porque ambas proposiciones, la directa y la negada, son válidas. Parece que el lenguaje, cuando tiene frases con varias negaciones, nos confunde.

Observemos también que C_R (de la tabla 2) no es un conjunto simple, sino un conjunto de conjuntos, cuyo elemento R-ésimo es también un conjunto de conjuntos, cuyo elemento R-ésimo también lo es, y así infinitas veces. O sea, que C_R no es constructible, pues requiere una recursión infinita.

Y justo ese elemento R-ésimo, del elemento R-ésimo, del elemento R-ésimo, repetido infinitas veces, es el que hay que mirar para ver si R está allí.

Ambas posibilidades son válidas: podemos decidir que R está allí o podemos decidir que no está. Sin embargo, dado que no hay un elemento final, pues es una recursión infinita, y que los elementos anteriores al final son todos conjuntos (es decir, no son números), lo más razonable es decidir que R no está allí. Por tanto, R es Richardiano.

Lo que Henry decidió

Si todos los coches dañados tenían el timón perfecto, eso significa que se está gastando demasiados recursos en el timón. Henry Ford puede ahorrar dinero haciendo timones no tan perfectos para que fallen más o menos a la vez que el resto de las piezas del coche. ¿Y cuánto tiempo es eso? Se puede calcular en función de los accidentes. Por ejemplo, si resulta que en promedio un coche tiene un accidente grave a los 20 años, es inútil hacer piezas que duren mucho más tiempo.

Con los seres vivos, incluyendo los humanos, ha pasado lo mismo. Los fallos en las piezas, o sea, las enfermedades de la vejez tales como cáncer, problemas cardíacos, fallos cerebrales, etc., habitualmente aparecen a partir de los 60 años porque en el ambiente tradicional en el que hemos vivido más tiempo y donde la evolución ha modelado nuestros genes, era muy probable morir de cualquier infección por alguna herida o alguna caída o alguna mordida por un animal antes de llegar a los 35 años de edad. La evolución no tenía ningún incentivo en fabricar corazones que durasen 500 años si su propietario, en promedio, iba a morir a los 35.

Ahora, gracias a que en los últimos cientos de años hemos pasado a vivir en grandes sociedades que tienen la medicina, la seguridad y la higiene como subproductos, las infecciones ocurren menos y no suelen ser mortales, las mordidas de león son casi imposibles y si te caes rompiéndote un hueso hay hospitales donde te operan y te salvan la vida. Como resultado, la edad promedio humana se acerca a los 90 años en muchas partes del mundo. Y los genes, en estos pocos cientos de años, no han tenido tiempo de darse cuenta de ello, y no han logrado adaptarse a la nueva situación. Como resultado, vemos una proliferación de enfermedades degenerativas que antes eran anecdóticas.

Además hay otro problema: nuestra etapa reproductora va aproximadamente desde los 15 años de edad hasta los 40. El otro objetivo de la evolución es la reproducción, de modo que tampoco hay mucha presión evolutiva por lograr personas que duren más allá de los 40 años si no se van a reproducir.

Todos estos problemas no deben desanimarnos. Actualmente hay muchos programas de investigación puntuales, dirigidos a prolongar la edad de los humanos por medio de mejores estilos de vida, nuevas medicinas y también de genética. Se trabaja en:

- Reparar genes defectuosos para evitar que produzcan enfermedades.
- Identificar los genes que determinan mayor longevidad para poder implantarlos en humanos.
- Identificar proteínas y enzimas en la sangre o en otros tejidos que promueven la longevidad.
- Medicinas, vitaminas y antioxidantes para preservar las funcionalidades de las células y evitar daños en ellas.
- Comida y estilos de vida más sanos. El estrés y la contaminación del aire y del agua producen envejecimiento.
- Nuevas prácticas médicas. El médico conocerá tus genes y te aplicará tratamientos de mantenimiento personalizados para tu cuerpo.
- Nanorobots que puedan reparar daños internos.

Pero hay además un programa de investigación integral para tratar la vejez de forma similar a como lo hacemos con un automóvil, es decir, con mantenimiento básico y reparación de los problemas que surjan. Lo dirige el geróntólogo biomédico Audbrey de Grey (2017) que ha identificado y propuesto solución para siete grandes grupos de enfermedades:

- Pérdida de células por lesiones, traumas, necrosis, etc. que produce enfermedades como el Parkinson y la diabetes. El tratamiento consistirá en inyectar células madre que regeneren los tejidos dañados.
- Resistencia a la muerte celular, que suele producir sobre todo obesidad. El tratamiento será enviar fármacos o virus que eliminen selectivamente solo esas células.

- Reproducción celular sin control, producida por daños en el ADN y que típicamente se identifica como cáncer. La respuesta a este problema es algo más complicada e invasiva: consiste en neutralizar los telómeros del ADN de todas las células del cuerpo, para impedir que se reproduzcan sin control, y resembrar todo el cuerpo con células madre cada 10 años, para facilitar la sustitución de células envejecidas o dañadas.
- Aumento de la basura intracelular, que produce arterioesclerosis y degeneración macular seca, entre otras enfermedades. Para evitarlo, de Grey propone diseñar e introducir nuevas encimas en las células, capaces de descomponer esa basura.
- Aumento de la basura extracelular, que produce Alzheimer, diabetes tipo II, etc. El tratamiento consistiría en desarrollar vacunas para que el propio sistema inmune descomponga esa basura.
- Rigidez de los tejidos debido a reacciones de glicación producidas por los azúcares. El fenómeno adverso más conocido ocurre en las arterias, que provoca un aumento de la presión sanguínea. Lo que propone es desarrollar fármacos capaces de llevar hacia atrás esas reacciones.
- Daño en las mitocondrias. El ADN mitocondrial no tiene los potentes mecanismos de reparación del ADN nuclear, por lo que los daños aquí se producen antes y llevan al individuo a problemas metabólicos y energéticos. Para evitarlo propone algo también muy radical e invasivo: llevar los genes de las mitocondrias al núcleo, salvando todos los obstáculos que ello va a implicar.

También es un buen indicador que la tasa de aumento de la esperanza de vida es actualmente de 3 meses por cada año que pasa, y sigue creciendo. Cuando llegue a 12 meses por cada año que pasa, las personas serán inmortales. Y muchos investigadores dicen que eso ya ha ocurrido de una u otra forma, por ejemplo, que la primera persona en alcanzar los 1000 años de edad ya ha nacido. Claro que hay que entender que son solo estimaciones estadísticas.

Campeón en reproducción

La pregunta tiene trampa. No estoy pensando en ningún ser vivo convencional, sino en los computadores. En 1930 no existía ninguno. Hoy en 2017 se estima que hay más computadores que personas, lo que se acentúa si incluimos los dispositivos de cómputo embebidos como teléfonos, electrodomésticos, automóviles, etc. Claro que los computadores no se reproducen solos sino que necesitan convencer a los humanos para que les ayuden. Y parece que nos han convencido muy bien.

¿Cuánto falta para que los computadores se reproduzcan sin nuestra ayuda? Muy poco porque las fábricas están ya automatizadas. Y algo importante va a cambiar cuando ello ocurra, ¿verdad?

Comunicaciones en 2D

El problema no tiene solución en dos dimensiones y lo más que se puede hacer es poner dos cables (Figura 112). El tercero es imposible. Por otro lado, en tres dimensiones es trivial de resolver. Es más, cualquier problema de este tipo tiene solución en tres dimensiones.

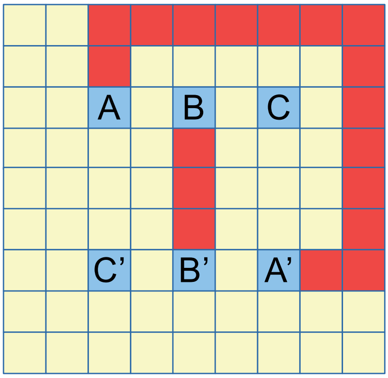

Figura 112. No hay solución

Cuando se diseñan circuitos impresos electrónicos (las tarjetas de color verde que hay dentro de nuestros computadores), este problema es muy habitual. Hay miles de puntos de conexión (en vez de los 6 de este problema) y hay que enrutar pistas de cobre para conectarlos. Como el circuito es plano, ello es imposible. Lo que se hace para solucionarlo es utilizar circuitos impresos de múltiples capas, típicamente cuatro: dos para llevar a todos los sitios la alimentación de 0 v y +3.3 v. Y las otras dos para las conexiones, de modo que cuando se agota el espacio en una, se puede hacer un agujero metalizado que nos conecte con la otra. Y a veces ni siquiera ello es suficiente, en circuitos con muy alta densidad de conexiones, por lo que se fabrican con más capas. Desde luego, en 3D no hay ninguna limitación.

En la consulta médica

La respuesta a esto es muy personal. No sé lo que hará usted, pero yo lo tengo muy claro: prefiero al hermano de AlphaGo, no solo en medicina sino en cualquier profesión, incluyendo las mías que son profesor e ingeniero.

¿De cuántas formas sabes multiplicar 15x18?

Hay muchas formas. Indicaremos algunas. La trivial es, si no sabes multiplicar, sumar quince veces el número 18. Si tienes suerte y no te equivocas:

En colegios constructivistas se aprenden otras más. Por ejemplo, si te das cuenta que 18 es casi 20, entonces puedes hacer: 15x18 = 15x(20-2) = 15x20 – 15x2 = 300 – 30 = 270 lo cual es muy sencillo de hacer, tan sencillo que no se requiere papel y lápiz, pues multiplicar por dos y por veinte lo puedes hacer de cabeza.

```
  18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
 +18
-------
  270
```

Figura 113. Multiplicar sumando

Por supuesto, nada impide sumar dieciocho veces quince.

Pero la forma que todo el mundo aprende en el colegio es

```
    15
   x18
--------
   120
   15
--------
   270
```

Figura 114. Multiplicación tradicional

Si sabes de factores primos entonces 15=3x5 mientras que 18=3x3x2=3x6 y entonces 15x18 = (3x3) x (5x6) = 9x30 = 270 lo cual también se puede hacer de cabeza.

Si ya has estudiado alguna carrera relacionada con los computadores o la electrónica digital seguro que te has dado cuenta que 15 es 16-1; y 18 es 16+2. Dieciséis es un bonito número en base dos (1000_2). Entonces 15x18 = (16-1)x(16+2) = 16x16 + 16 – 2 y estas operaciones son triviales en binario, gracias a que multiplicar por dieciséis equivale a añadir tres ceros al otro número. El resultado es 256 + 16 – 2 = 255 + 15 = 270.

Se puede multiplicar comenzando por la izquierda (FreeTestPrep, 2012). Y hay otras formas muy rápidas, que las emplean las personas que quieren deslumbrar con sus cálculos de cabeza (Kumar, 2012).

Cuantas más formas tengas de resolver un problema, cuantas más relaciones fabriques con otros conceptos, incluso de áreas muy dispares, más inteligente eres.

Salvar el foso

La solución es aprovechar una esquina, como puede verse en la figura 115.

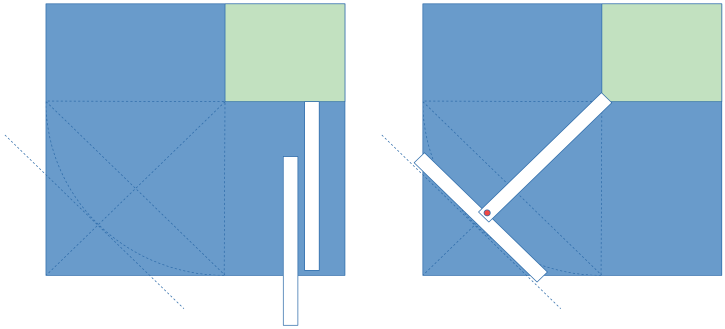

Figura 115. Izquierda: las dos tablas no parecen alcanzar. Derecha: hay un punto cerca de cada esquina (marcado en rojo) que es alcanzable por las dos tablas dispuestas en diagonales cruzadas, en una configuración estable que permite pasar al otro lado del foso

NIM

Lo primero que debes hacer es contar el número de monedas de cada fila y expresarlo en binario. Y luego contar la cantidad de ‘1’ en cada columna de los números binarios. En la figura 116 se pueden ver tres ejemplos.

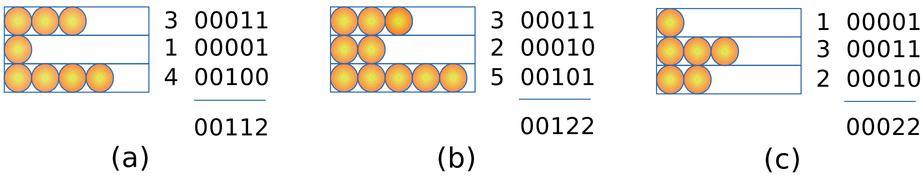

Figura 116. Tres ejemplos de NIM

Se dice que un juego de NIM está equilibrado si es par la cantidad de '1' en todas las columnas de los números binarios. Y desequilibrado en caso contrario. En (a) y (b) el juego está desequilibrado, mientras que en (c) está equilibrado.

Es fácil de ver que, dado un juego equilibrado, cualquier jugada posible lo transforma en desequilibrado.

Por ello, la estrategia ganadora consiste en recoger monedas de modo que, después de ello, el juego quede equilibrado. Si inicialmente el juego está desequilibrado, el primero en jugar es el que gana, siempre que use esta estrategia. Si el juego está equilibrado, es el segundo jugador el que gana.

Mantener un invariante, el equilibrio en el juego, conduce a la victoria.

Detectar engaños

Este experimento se le atribuye al psicólogo Peter Wason (en Pinker, 1997, p. 356) y a John Tooby y Leda Cosmides (en Boyd y Silk, 2004, p. 530). La mayoría de la gente falla en la parte a) pero acierta sin problemas en la b), lo cual indica que nuestro cerebro está adaptado a resolver problemas sociales, pero no abstractos, a pesar de que se trata del mismo problema, una implicación de tipo $P \Rightarrow Q$.

La respuesta para a) es que hay que girar la carta D y la 7.

La respuesta para b) es que hay que preguntar la edad al bebedor de cerveza; y qué está bebiendo a la persona de 16 años.

Las tres puertas

La mayoría de la gente piensa que da igual si permanecemos con la puerta inicialmente escogida o nos cambiamos a la puerta que no abrió el presentador, pues la probabilidad de que el premio esté en una puerta cualquiera es ⅓. Sin embargo, no es así: es mejor cambiar de puerta y enseguida demostraremos por qué.

Cuando leí este problema por primera vez en Hoffman (2000), yo también me equivoqué y no entendí la explicación para la solución que daban. Y mi ofuscación era tal que escribí un programa en Ruby simulando el concurso, ejecutándolo muchas veces, con el premio colocado al azar en cualquier puerta, lo mismo que las elecciones del concursante, y contando al final en cuantas ocasiones se llevaba el premio. El *software* indicaba que era mucho mejor cambiar de puerta. Entonces pensé que mi *software* tendría algún *bug*. En fin, me demoré varias horas en entender mi error.

El problema lo planteó por primera vez en 1990 Marilyn vos Savant, una persona con un coeficiente intelectual de los más altos en el mundo, a pesar de que no tiene estudios universitarios. Y generó mucha polémica, pues la demostración tampoco era fácil de entender. Espero que esta sí lo sea.

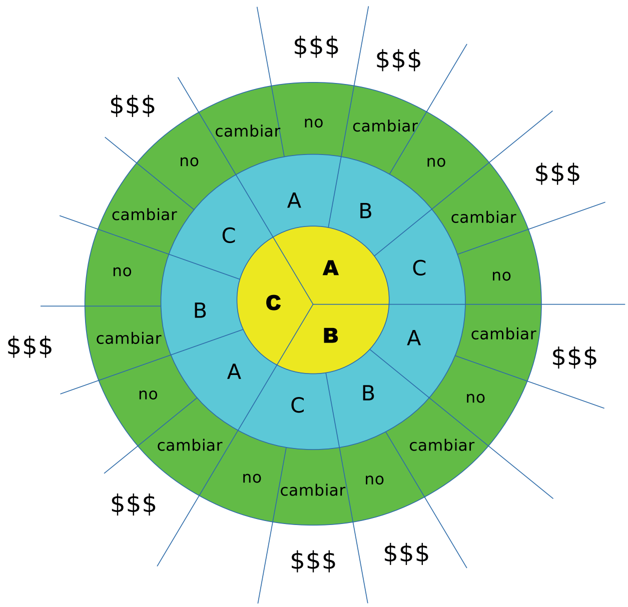

Figura 117. Solución al problema de las 3 puertas A,B,C

En el círculo central de la figura 117, en color amarillo están las posibles ubicaciones del premio (puertas A, B o C). En el siguiente circulo, en color azul, están las posibles elecciones iniciales de puerta (A, B o C). En el círculo externo, de color verde, están las opciones de cambiar o no cambiar de puerta. Por último, por fuera de los círculos se indican con $$$ los casos donde el concursante obtiene el premio.

Conclusión:

- En 6 casos, cambiar de puerta me conduce a premio ($$$).
- En 3 casos, no cambiar de puerta me conduce a premio ($$$).

Por tanto, es mejor cambiar de puerta, ya que la probabilidad de obtener premio es el doble que si me quedo con la puerta inicial.

Hay algo muy sutil que nos cuesta entender: aunque abrir una puerta vacía puede parecer que no cambia las cosas pues no aporta ninguna información, resulta que sí lo hace. Porque el presentador de televisión no elige al azar, sino que abre una puerta que sabe perfectamente que está vacía, a la vez que no puede abrir la que hemos elegido nosotros. Nos está dando información.

También puede entenderse usando el teorema de Bayes. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que inicialmente elijo la primera puerta.

$$p\ (\textit{premio en primera puerta}) = \frac{1}{3} \qquad \text{Ec. 40}$$

El presentador abre la segunda puerta. Entonces el premio quizás esté en la primera o en la tercera. La probabilidad de la ecuación 40 no cambia, pero ahora sabemos que la segunda puerta no tiene premio. Por tanto:

$$\begin{aligned} & p(\text{premio en tercera puerta}|\text{segunda puerta sin premio}) \\ &= \frac{p(\text{segunda puerta sin premio}|\text{premio en tercera puerta}) \cdot p(\text{premio en tercera puerta})}{p(\text{segunda puerta sin premio})} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \text{Ec. 41}$$

Resumiendo, es mejor cambiar a la tercera puerta porque la probabilidad de premio es mayor:

$$\begin{aligned} p(\text{premio en primera puerta}) &= \frac{1}{3} \\ p(\text{premio en tercera puerta}|\text{segunda puerta sin premio}) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \text{Ec. 42}$$

Aplanando la circunferencia

Antes de realizar ningún cálculo hay que demostrar que la serie de N semicircunferencias converge hacia la línea conforme N tiende a infinito. Y eso no ocurre, pues la pendiente de las semicircunferencias en los puntos que interseca con la línea no varía al aumentar N. Por tanto no hay convergencia, de modo que el resto de cálculos no tienen ningún sentido.

Punto fijo de Palmira a Tuluá

Aunque parezca imposible, sí se puede demostrar que existe al menos un punto en la carretera por el que pasó Luisa a la misma hora del lunes y del martes. El punto en sí no se puede determinar, pues no hay datos suficientes, pero su existencia es fácil de ver si realizamos un gráfico del espacio recorrido respecto a la hora, y superponemos los trayectos de los dos días. En la figura 118-a podemos ver un viaje típico, en color verde de Palmira a Tuluá, y en rojo de Tuluá a Palmira. Dado que la función es continua, no queda alternativa: debe haber un punto de intersección entre los dos recorridos. En la figura 118-b observamos que Luisa se detuvo mucho tiempo apenas salió de Tuluá, quizás por un pinchazo, y luego tuvo que coger más velocidad para llegar a las 13:00 a Palmira, pero también hay un punto de intersección entre los dos recorridos. En la figura 118-c vemos que tuvo que retroceder al poco de salir de Tuluá, quizás se le olvidó saludar a alguien, pero eso es irrelevante pues al final también existe un punto de intersección entre los dos recorridos. Y en la figura 118-d vemos que a causa de esos retrocesos no solo hay un punto de intersección sino tres.

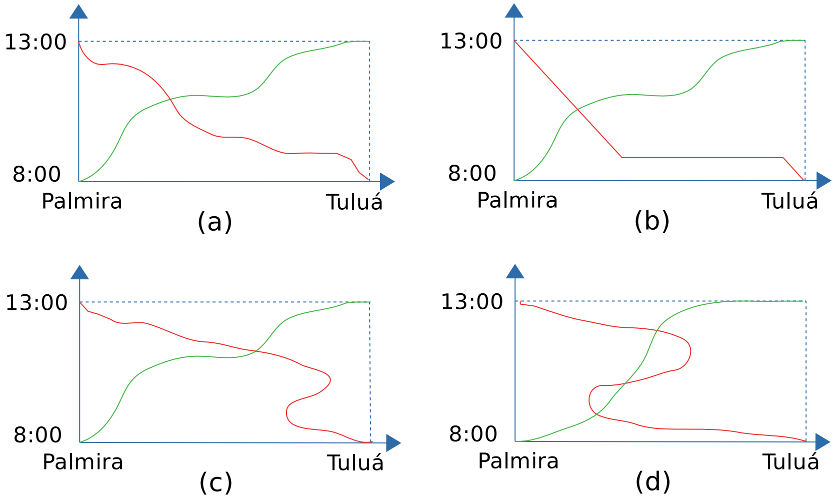

Figura 118. Algunas formas de hacer el recorrido de ida y vuelta

Es fácil de ver que independientemente de la velocidad que lleve, siempre existe al menos un punto de la carretera donde estuvo a la misma hora el lunes y el martes. A ese punto se le llama "punto fijo".

Arrugando papeles

Aprovecha que la caja tiene muchos más papeles y dibuja en color rojo la silueta del primer papel arrugado sobre el segundo papel de la caja, que está liso. Es algo así como proyectar la sombra, verticalmente.

Sobre ese segundo papel liso (en 2D) habrá ahora una línea roja, seguramente muy quebrada, pero es continua y es cerrada.

Toma después ese segundo papel y vuélvelo a arrugar exactamente de la misma forma como hiciste con el primero. Sí, ya sé que eso es muy difícil en la práctica, pero continuemos con el experimento mental, pues en principio puede hacerse.

Ahora que está arrugado, el papel contiene una curva roja en 3D, pero sigue siendo cerrada y continua. No hay "islas" ni discontinuidades porque el papel solo se ha doblado, sin llegar a romperlo en ningún sitio. Arroja este segundo papel sobre la caja, exactamente en el sitio y orientación que lo hiciste con el primer papel.

Proyecta verticalmente esa línea roja sobre el tercer papel liso, dibujando sobre él una nueva línea roja. Obviamente, el área que encierra esta nueva línea estará dentro de la primera. El contorno rojo se ha contraído.

Repite este proceso un gran número de veces. El contorno rojo se irá contrayendo cada vez más hasta reducirse a un punto. Ese es el punto que no ha cambiado de sitio. Ese es el punto fijo.

Puede haber más de un punto fijo. De hecho, o hay uno o hay infinitos[104]. Por ejemplo, podría ser un área irregular que te has empeñado en mantener intacta mientras arrugabas el resto del papel. O también un segmento de línea. Hay un caso especial a analizar, donde la línea cerrada roja no converge a un punto, y es si la zona que te has empeñado en mantener lista y en su mismo sitio, también la has rotado horizontalmente intentando que los puntos no queden donde estaban originalmente (si se trata de un círculo, un cuadrado u otra figura geométrica que tenga simetría de rotación), o la has dado la vuelta verticalmente (para lo que se requiere que tenga simetría especular). En ambos casos habrá un centro de rotación o un eje de giro, que son los que no han cambiado de sitio. Queda claro que en todos los casos hay al menos un punto fijo.

La vela

Este problema es muy viejo y de autor desconocido, aunque se lo escuché por primera vez a mi hermano Santi.

La solución es poner la vela horizontal y encenderla por ambos extremos a la vez. Cuando toda se haya consumido, habrá transcurrido media hora.

La razón de ello es la siguiente: al arder la vela por ambos extremos habrá un punto que alcancen las dos llamas simultáneamente. Ese es el punto fijo. En ese momento, toda la vela se habrá consumido. Ese punto no necesariamente está justo en la mitad, puesto que la vela no es uniforme y cada llama avanzará a diferentes velocidades. Sin embargo ese punto se alcanza exactamente en media hora. Entendamos por qué: supongamos que debido a las irregularidades de la vela, una llama alcanza ese punto en 43 minutos. Como

104 Si hubiera dos puntos, entonces el segmento recto que los une también estaría conformado en su totalidad por puntos fijos. Porque en caso contrario habría que arrugar el segmento, y ello implicaría un acortamiento de la distancia entre los dos puntos iniciales, y para ello al menos uno se habría tenido que mover del sitio, por lo que no podrían ser puntos fijos ambos.

la otra llama llega a la vez, también en 43 minutos, entonces si hubiera una única llama recorriendo toda la vela, se demoraría 43+43=86 minutos en consumirla, lo cual contradice el enunciado, que dice que la vela se consume en exactamente una hora. La única forma de no contradecir el enunciado es que ambas llamas alcancen el punto fijo en 30 minutos, es decir, media hora.

Para saber más

La mayoría de los autores de estos problemas son anónimos. Me los contaron frente a unas cañas o proceden de revistas de entretenimiento donde no aparece ninguna referencia.

Los problemas de ingenio son un pasatiempo divertido, despiertan nuestra creatividad, sirven para aumentar nuestro coeficiente intelectual y mantienen joven nuestro cerebro. Los seleccionados aquí, además, iluminan algunos de los temas que se abordan en este libro.

A continuación indico cuatro libros donde hay recopilaciones de estos problemas.

- Juan José Rivera Gómez (1981). *Comecocos I*. Madrid: Editorial Álamo.

Un libro muy viejo con muchos problemas de ingenio, la mayoría sencillos, pero contiene también algunas joyas como "La mayor toca el piano", que ya mencioné en el libro anterior. Si lo resolviste no será muy difícil entender este otro, que apareció en la revista *Investigación y Ciencia* (la versión en español de *Scientific American*), sección Juegos Metamágicos, hace un montón de años (febrero de 1980), probablemente de Martin Gardner:

Hay dos números enteros M y N, que están entre 1 y 20, no necesariamente distintos, ambos excluidos. Y hay dos matemáticos S y P. Al matemático S se le dice cuánto vale la suma M+N, mientras que al matemático P se le dice cuánto vale el producto M*N. Después se desarrolla la siguiente conversación:

Matemático S: No sé cómo vas a averiguar mi suma.
Matemático P: Ya sé tu suma.
Matemático S: Entonces yo ya sé tu producto.
¿De qué números M y N se trata?

- Lewis Carroll (1979). *Matemática demente*. Barcelona: Tusquets Editores.

Del mismo autor de "Alicia a través del espejo". Hay un cuento espectacular, "Lo que le dijo la tortuga a Aquiles", que demuestra que incluso para aplicar la lógica se necesita sentido común. Si hay reglas, se requieren metarreglas, para que las primeras no sean abusadas. Y hay luego unos pocos problemas de ingenio que hacen reflexionar sobre cosas cotidianas como: ¿por qué los espejos invierten izquierda y derecha, pero no arriba y abajo?

- Martin Gardner (1992). *Inspiración Ajá*. Barcelona: Editorial Labor.

Este libro es técnicamente el mejor, el más complejo y que toca muchos aspectos de las matemáticas, no solo la lógica.

- Raymond Smullyan (1978). ***¿Cómo se llama este libro****?. El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos*. Madrid: Prentice Hall.

Este libro también es muy bueno, pero se centra únicamente en la lógica.

Referencias

Libros, artículos y enlaces web

Arthur, W. B. (1994). Inductive Reasoning and Bounded Rationality (The El Farol Problem). In *American Economic Review - Papers and Proceedings, 84*(406), pp. 1-11.

Boyd, R. y Silk, J. B. (2004). *Cómo evolucionaron los humanos*. Barcelona: Editorial Ariel.

de Grey, A. D. N. J. (2017). Revertir el envejecimiento mediante la reparación de daños moleculares y celulares. En *El próximo paso: la vida exponencial*. España: BBVA, OpenMind.

Hoffman, P. (2000). *El hombre que solo amaba los números. La historia de Paul Erdös y la búsqueda de la verdad matemática*. Barcelona: Ediciones Granica.

Hofstadter, D. R. (1979). *Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle*. Barcelona: Tusquets Editores.

Pinker, S. (1997). *Como a mente funciona*. São Paulo: Editora Schwarcz.

RP_Wiki (2017). Richard's Paradox – Variation: Richardian Numbers. Recuperado el 21 de agosto de 2017. Disponible en: https://goo.gl/7F1r6X

von Savant, M. (1990). *Game Show Problem*. Recuperado el 12 de abril de 2017. Disponible en: https://goo.gl/VwqdU5

Películas y videos

FreeTestPrep (2012). *Speed Multiplication (1 digit) from Left to Right*. Recuperado el 2 de octubre de 2016. Disponible en: https://goo.gl/FjJa4f

Kumar, P. (2012). Fast *Multiplication Trick 5 - Trick to Directly Multiply the Big Numbers*. Recuperado el 2 de octubre de 2016. Disponible en: https://goo.gl/Rme7xS

GLOSARIO

AC: Autómata celular. Un grafo regular e infinito, donde cada nodo está conectado bidireccionalmente solo con sus vecinos.

FSM: *Finite State Machine*, máquina de estados finitos. Grafo dirigido con una única marca indicando el estado activo. La marca puede moverse a otro estado a través de algún arco saliente de ese estado, si se cumple la condición indicada en el arco. Si hay más de una marca activa, se llama Red de Petri.

Estocástico: una secuencia es estocástica si cada término es imposible de predecir conociendo los anteriores. Las secuencias estocásticas también se pueden llamar al azar o no-deterministas. No es lo mismo que aleatorio, aunque mucha gente los confunde.

Aleatorio: una secuencia es aleatoria si no se puede comprimir. No es lo mismo que estocástico, aunque mucha gente los confunde.

Seudoaleatorio: es similar a un proceso caótico digital, con horizonte de predicción de una unidad de tiempo (o sea, solo se puede predecir la salida actual, pero no las siguientes, a partir de todas las entradas pasadas y de la fórmula) y donde permanece oculta la fórmula de conversión de entradas en salidas. El hecho de que sea digital implica que no hay ruido en las entradas, de modo que estrictamente hablando no es caótico. Pero la idea de un cortísimo horizonte de predictibilidad permanece.

Caótico: la definición rigurosa puede verse en el correspondiente capítulo, pero aproximadamente se puede decir que un proceso es caótico si es muy sensible a sus entradas, es decir, con un minúsculo cambio de la entrada, la salida cambia mucho. Eso hace que sean difíciles de predecir y suele haber un horizonte de predicción a partir del cual los errores acumulados hacen imposible anticipar el futuro del sistema.

Determinista: una secuencia de datos (o un proceso) es determinista si las sucesivas salidas (o estados) están completamente determinadas por las salidas anteriores (o estados anteriores). Los procesos deterministas convierten sus entradas en salidas por medio de una fórmula o un algoritmo que no contiene ningún elemento de azar. De modo que si se conocen las condiciones iniciales, se pueden predecir las salidas sucesivas. Y si las entradas se repiten, también lo hacen las salidas.

Fractal: un objeto geométrico cuya dimensión de Hausdorf-Besicovitch no coincide con su dimensión topológica. Informalmente se dice cuando un objeto tiene infinita rugosidad y autosemejanza en todas las escalas.