Luis Cornelio Recalde
Gabriela Inés Arbeláez
(Compiladores)

LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO MATEMÁTICO

Una perspectiva histórico-epistemológica

Universidad del Valle
Programa Editorial

El presente texto es uno de los productos de un proyecto de investigación aprobado por Colciencias y la Universidad del Valle, realizado entre enero de 2005 y abril de 2008 bajo el título de "La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes". La iniciativa de producir este texto surge de la necesidad de proponer a la comunidad de educadores matemáticos de secundaria y universidad de la región una opción complementaria para el trata-miento de los números reales a nivel escolar. Específicamente se plantea la posibilidad de incorporar, desde una visión amplia del campo de la Educación Matemática, las dimensiones históricas, epistemológicas y filosóficas relativas al concepto número real, dentro del conjunto de posibles estrategias que permitirían una mejor apropiación de dicho concepto tanto de los profesores en general como de los estudiantes de la Educación Media y primeros años de universidad. El carácter interdisciplinario de este trabajo de investigación está respaldado por la participación de dos grupos de investigación: el Grupo de Historia de las Matemáticas y el Grupo de Educación Matemática, ambos de la Universidad del Valle.

Universidad del Valle

Programa Editorial

LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO MATEMÁTICO

Una perspectiva histórico-epistemológica

E&P
Colección Educación y Pedagogía

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO MATEMÁTICO

Una perspectiva histórico-epistemológica

Luis Cornelio Recalde
Gabriela Inés Arbeláez
(Compiladores)

E&P
Colección Educación y Pedagogía

Recalde, Luís Cornelio

Los números reales corno objeto n1aten1ático: una perspectiva histórico epistemiológica / Luis Cornelio Recalde, Gabriela Inés Arbeláez.--Santiago de Cali: Editorial Universidad del Valle, 2011.

236 p.; 24 cm.--(Ciencias Naturales y Exactas)

1.Números reales -Historia 2. Funciones algebraicas -Historia 3. Teoría de los números - Historia 4. Matemáticas -- Historia J. Arbeláez, Gabriela Inés I I. Tít. III. Serie

512.72 cd 22ed.
A1306524

CEP-Banco de la República. Biblioteca Luis Ángel Arango

Universidad del Valle
Programa Editorial
Título: Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico epistemológica
Compiladores: Luis Cornelio Recalde, Gabriela Inés Arbeláez
ISBN: 978-958-670-911-8
ISBN-PDF: 978-958-5164-19-2
DOI: 10.25100/peu.496
Colección: Educación y Pedagogía
Primera Edición Impresa septiembre 2011

Rector de la Universidad del Valle: Édgar Varela Barrios
Vicerrector de Investigaciones: Héctor Cadavid Ramírez
Director del Programa Editorial: Omar J. Díaz Saldaña

Diseño de carátula, corrección de estilo y diagramación: G&G Editores

Cali, Colombia, diciembre de 2020

CONTENIDO

Capítulo 3
TEORÍA DE ECUACIONES Y CONCEPTO DE NÚMERO.
LOS CASOS DEL ÁLGEBRA ÁRABE Y DEL RENACIMIENTO

Capítulo 4
EL PAPEL DE LA TÉCNICA ALGEBRAICA CARTESIANA
EN LOS PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DE LOS REALES

Capítulo 5
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO
MATEMÁTICO: LA “CONSTRUCCIÓN” DE DEDEKIND

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

INTRODUCCIÓN

Este texto fue concebido y elaborado en el marco de un proyecto de investigación sobre *La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes*. El equipo responsable adoptó un enfoque interdisciplinario para tratar de dar respuesta a una demanda sentida de la comunidad de educación matemática en Colombia sobre cómo utilizar la historia, la epistemología y la filosofía de las matemáticas como herramientas para la construcción de pensamiento matemático en contextos escolares. Concretamente en casos de la enseñanza de objetos matemáticos como los números reales que, por la naturaleza compleja de su desarrollo y apropiación conceptual, exigen el diseño de nuevas perspectivas y posibilidades agenciadas desde diversas disciplinas.

Se plantea entonces la cuestión general de las modalidades de apropiación y uso de la historia en la educación matemática. En el capítulo primero, *Objetividad matemática, historia y educación matemática*, se trata esencialmente de mostrar que al margen de las diferencias de objeto y método que puedan existir entre una y otra, la historia y la educación matemática comparten el interés por descifrar cuestiones cruciales de la actividad matemática como lo es la búsqueda de la objetividad matemática.

Historia y educación matemática se enfrentan en sus indagaciones a la pregunta: ¿Cuál es la naturaleza de los actos de razonamiento que despliegan los sujetos cuando, enfrentados a la explicación de determinados problemas, participan de procesos de constitución de objetos matemáticos como los números reales? Ante todo se trata de explicar las condiciones lógicas de emergencia de la estructura matemática de $\mathbb{R}$ como “extensión” de la estructura de $\mathbb{Q}$. Para ello se adopta un esquema de solución de problemas en cuatro fases.

Se comienza por establecer las lagunas operatorias de carácter algebraico y topológico que caracterizan al sistema de los racionales. Se muestra luego que en la indagación sobre este problema se emplearon históricamente ciertas técnicas y procedimientos operatorios sobre $\mathbb{Q}$, en particular las cortaduras o sucesiones de Cauchy de racionales.

En un tercer momento las propiedades de la estructura de $\mathbb{Q}$ se extienden a un nuevo sistema cuyos elementos representan clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales. Aquí se plantea como hecho significativo, desde el punto de vista histórico y cognitivo, el requerimiento de “completar” a $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Finalmente, la cuarta fase del esquema problémico de constitución de objeto, consiste en constatar que $\mathbb{R}$ adquiere una realidad independiente de las circunstancias previas en las que fue introducido. ¿En qué sentido se puede hablar de que estos nuevos objetos son una “construcción matemática”? Es cierto que la existencia de los reales presupone modos previos de existencia, pero el esquema analítico propuesto en este capítulo para explicar la “extensión” apunta a mostrar que, contrariamente a lo que en ocasiones se supone, a los reales no se llega por una especie de separación de rasgos esenciales que estarían contenidos en ciertas entidades primigenias.

Así planteada, la cuestión de la objetividad de los reales tiene una importancia pedagógica para la educación matemática, concretamente para la formación matemática del profesor. Sin embargo, puede ser útil para el docente examinar situaciones históricas de nuestras instituciones educativas en las que la objetividad matemática se ha planteado como exigencia en las prácticas de apropiación de los números reales en ambientes universitarios, tomando la historia de nuestros textos de enseñanza como revelador de estas prácticas. Para ilustrar la importancia pedagógica de este género de historia, en la parte final del capítulo 1 se presentan algunas consideraciones sobre los contenidos y la organización de los cursos para la enseñanza del cálculo infinitesimal y el análisis matemático en los años 1930 y 1940 en universidades de Colombia y Perú.

Una vez planteada esta posición general sobre la objetividad de los números reales y sus implicaciones en la educación matemática, se abordan distintos momentos de su desarrollo relacionados con la siguiente rejilla analítica: Del número como forma de la magnitud, al número como forma de solución de ecuaciones, al número como forma de la teoría de funciones, al número como forma de la teoría de conjuntos, a los tratamientos aritméticos, lógicos y estructurales del número. El segundo capítulo: *Medida, número y magnitud en la antigüedad griega* tiene como propósito analizar las primeras huellas de los números irracionales en la antigüedad griega. El punto de vista que aquí se mantiene es que la constitución histórica de los números reales se da en la tensión entre las actividades de medir, contar y ordenar. Se presentan y explican tres etapas en el establecimiento de la actividad de medir. La etapa *primaria* corresponde a la escuela pitagórica; la etapa *relativa* a los resultados sintetizados por Euclides en algunos apartes de los *Elementos*. La etapa *abstracta*, es abordada en el séptimo capítulo.

Al presentar la teoría pitagórica de los números se empieza por caracterizar la concepción filosófica subyacente según la cual las cosas guardan una relación biunívoca con los números de contar. Sin embargo, en el ámbito de la medida los pitagóricos se encontraron con las magnitudes inconmensurables, que se constituirían en el primer antecedente histórico de los números irracionales. Se revisan los tres niveles de emergencia de lo irracional (el contexto musical, el problema de la diagonal del cuadrado y el problema de la diagonal del pentágono), haciendo énfasis en los dos últimos, puesto que son los que sirven de referencia para la historia del continuo aritmético. La salida histórica al problema de las magnitudes inconmensurables se dio a través de la teoría de razones y proporciones de Eudoxo, sistematizada por Euclides en los *Elementos*. El telón de fondo de los desarrollos teóricos de Euclides corresponde a la medida relativa; es decir, al proceso de transformar las figuras planas en cuadrados con regla y compás. En este capítulo se estudia este proceso para el caso de las figuras rectilíneas tratado por Euclides en el libro I de los *Elementos*.

Luego se estudia la teoría de razones y proporciones, tanto para magnitudes como para números. Al analizar la definición de razón, se destaca su importancia histórica, específicamente su trascendencia para la definición de cortadura de Richard Dedekind en el siglo XIX. En el último apartado se pone de presente el puente de contacto que establece Euclides entre los números y las magnitudes (en particular la relación directa entre las razones de magnitudes conmensurables y las razones numéricas), ilustrando algunos aspectos conceptuales que guiaron el trabajo de los matemáticos por más de veinticinco siglos, culminando con el establecimiento del dominio de los números reales.

En el tercer capítulo: *Teoría de ecuaciones y concepto de número: el caso del álgebra árabe y del Renacimiento*, se examinan distintas problemáticas relacionadas con procesos de objetivación de los números a través de la constitución de la teoría de ecuaciones. En un primer momento se estudia en el trabajo matemático de al-Khwarizmi la emergencia de ese nuevo campo disciplinar de las matemáticas que será designado con el nombre de “álgebra”, y que dará inicio a una teoría de ecuaciones con modos particulares de considerar el número y la magnitud. En un segundo momento relativo al álgebra renacentista se analizan en la obra de Cardano los procedimientos utilizados en la solución de ecuaciones dada la no aceptación de los números negativos. Se examinan las condiciones históricas de introducción de una “teoría de ecuaciones”, en donde la preocupación no radica exclusivamente en el método de solución, sino en la inquietud manifiesta por la naturaleza de las raíces y el grado de las ecuaciones, que conlleva un tratamiento particular de lo numérico.

En el cuarto capítulo, *El papel de la técnica algebraica cartesiana en los procesos de objetivación de los reales,* se proponen dos hipótesis en relación con los aportes del álgebra al proceso de objetivación de $\mathbb{R}$. La primera plantea que en su origen el álgebra es una técnica matemática. Su uso en el proceso de estudio y solución de problemas de distinta naturaleza jalona lo que algunos investigadores han denominado "procesos de algebrización de las matemáticas". Solamente a partir de desarrollos teóricos subsiguientes el álgebra adquirirá un estatuto autónomo de disciplina como la aritmética o la geometría. La segunda hipótesis plantea que tal proceso de algebrización posibilita una ampliación del espectro matemático de nuevos conocimientos relacionados con nuevas preguntas y problemáticas, imposibles de formular en el contexto anterior.

La obra de Descartes es un momento de madurez decisivo en la consolidación de la técnica algebraica gracias a los artificios que introduce, los cuales le permiten resolver, además del Problema de Pappus, dos de los problemas clásicos de las matemáticas: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Se muestra que la modalidad cartesiana de algebrización de la geometría que da lugar a la constitución de la "curva algebraica" (objeto radicalmente distinto al objeto "curva geométrica" de los griegos), introduce, en el mismo movimiento conceptual, una nueva manera de entender la relación entre número y magnitud que va a constituirse en momento decisivo para la objetivación de los reales. Este proceso de objetivación "dinamizado con el trabajo de Descartes" se cristalizará en el siglo XIX en las distintas dinámicas de constitución de los números reales generadas en los trabajos de Weierstrass, Dedekind y Cantor, entre otros.

El quinto capítulo: *Los números reales como objeto matemático: La "construcción" de Dedekind,* estudia las características epistemológicas del aporte de Dedekind. Empleando el enfoque objetivista de la historia de las matemáticas, se identifican distintos niveles de razonamiento que intervienen en la formulación axiomática de $\mathbb{R}$. Esto conlleva a descomponer el acto epistemológico de Dedekind, es decir, la llamada construcción de 1872, en una gradación de momentos lógicos de pensamiento encadenados a la expresión formal de $\mathbb{R}$. Inicialmente se hace una breve reflexión sobre el sentido y valor explicativo de un enfoque objetivista de $\mathbb{R}$, complementario al desarrollo del primer capítulo. ¿Qué significa que $\mathbb{R}$ sea un objeto matemático? Tratando de dar respuesta a esta pregunta se retoman algunas problemáticas históricas asociadas al devenir de $\mathbb{R}$, algunas ya tratadas parcialmente en el segundo capítulo, tales como la definición de continuidad en la *Física* de Aristóteles, el hallazgo de las magnitudes inconmensurables por los pitagóricos, la naturaleza de los objetos geométricos de los *Elementos* de Euclides, entre otras.

Este marco histórico permite, además de reafirmar el carácter evolutivo de ℝ, postular dos problemáticas ligadas a su presentación axiomática: las limitaciones del infinito potencial y las limitaciones de la intuición y representación geométrica. Esta última problemática se desarrolla a través de un acercamiento a las condiciones históricas y epistemológicas que hacen necesaria la formulación del teorema del valor intermedio. Especialmente en lo que tiene que ver con la red de conceptos (límite, sucesión y convergencia) en que se sustenta este teorema en la obra de Cauchy y Bolzano. De otra parte, se muestra que estas viejas dificultades epistemológicas se hallan directamente asociadas a problemáticas actuales en la enseñanza de ℝ, como la aprehensión del infinito actual en la caracterización de un número irracional y el uso recurrente de procedimientos constructivos en la recta geométrica para su caracterización. Las limitaciones que presentan los procedimientos de orden geométrico son quizás la razón más fuerte que en su época invoca Dedekind a favor de la creación de un continuo aritmético.

Finalmente, se clasifican y analizan los momentos lógicos que se consideran decisivos en la construcción de ℚ como dominio de partida para la obtención de ℝ, el traslado de las propiedades de ℚ a la recta geométrica, la formulación del principio de continuidad, la demostración de la no extensibilidad de ℚ bajo la operación raíz cuadrada, la extensión de ℚ a ℝ como la adquisición de una nueva estructura y la preservación de la estructura anterior, y las posibilidades del nuevo dominio representadas en operaciones y cálculos. Un aspecto de fundamental importancia en los procesos constitutivos de los números reales, particularmente en la obra de Dedekind y Cantor, es que ellos se relacionaron estrechamente con el advenimiento de nuevos campos matemáticos (el análisis, la topología y la teoría de conjuntos, entre otros). Este hecho histórico favoreció el marco epistemológico de referencia para avanzar en una caracterización más depurada de ℝ en términos formales, a partir del cual se precisarán propiedades fundamentales de su estructura como la completez.

En los inicios del siglo XIX, con la caracterización topológica de ℝ emerge la noción abstracta de vecindad, la cual además de su valor conceptual intrínseco permite una presentación de ℝ con ciertas ventajas pedagógicas que se exponen en el sexto capítulo sobre *La noción de vecindad en la apropiación de los números reales*. La apropiación conceptual de la completez de los números reales pasa por el estudio de la noción de vecindad; esto implica, en primer lugar, mostrar que la noción de vecindad es la base conceptual de las nociones de límite, convergencia y continuidad; y en segundo lugar, explicitar el rol de la noción de vecindad en las construcciones clásicas de los números reales. Para tal efecto, el capítulo utiliza un enfoque que no corresponde necesariamente con el devenir histórico, sino que ha sido concebido más con el interés pedagógico de mostrar un encadenamiento intuitivo de etapas del desarrollo moderno de la noción de vecindad que se articulan con los clásicos conceptos del análisis, y ofrecen así una manera plausible de comprender la completez de ℝ.

A partir de un acercamiento intuitivo a la noción de vecindad y al concepto de cercanía arbitraria, se presenta la definición en términos de la noción de distancia y posteriormente se muestra su independencia, con lo cual se establecen relaciones de cercanía en conjuntos de naturaleza cualquiera. Luego se muestra la relación entre la continuidad por puntos de una función real, el límite de una función y la noción de vecindad. De manera particular, se argumenta en favor de la definición de estos conceptos en términos de vecindades. Estas definiciones, presentadas en su más alto grado de generalidad, no sólo muestran de manera evidente la vecindad como concepto fundamentador del límite y la continuidad sino que resultan más intuitivas que las expresadas en términos de ε y δ.

Al final de este capítulo se comentan, en su versión moderna, las dos construcciones típicas de los reales, a través de sucesiones de Cauchy de números racionales y a través de cortaduras, desvelando permanentemente el rol que juega la noción de vecindad. En cada una de ellas se identifican tres niveles epistemológicos en el proceso de construcción teórica. Se muestra con detalle, que el paso detenido y consciente por cada uno de estos niveles, en los que se avanza en abstracción y generalidad, resulta indispensable en el proceso de comprensión de los números reales como objeto matemático.

El séptimo y último capítulo de este texto: *Los números reales en el marco de una teoría de la medida* busca describir la base conjuntista sobre la que reposa el campo de los números reales. Para ello se retoma la discusión planteada en el segundo capítulo con respecto a la relación entre las nociones de medir, contar y ordenar. En este sentido, se muestra que la aritmetización del continuo implicó el paso de una etapa de medida relativa a una etapa de medida *abstracta*. El conjunto de los números reales ℝ constituía una rejilla numérica referencial para asignarle a cada magnitud acotada un número real determinado.

En primera instancia se llama la atención sobre las limitaciones de una teoría axiomática de los reales en el sentido de no establecer algoritmos operativos. Esto significa que si bien a través de lo axiomático se implanta el piso legal de la objetivación del continuo, muchos interrogantes quedaban sin resolver. Para especificar los problemas inherentes a la constitución de ℝ como un cuerpo numérico especial, se describe su construcción conjuntista. Para ello, primero se hace una presentación de la medida de Borel y sus limitaciones, las cuales dan paso a la medida de Lebesgue. Para entender este cambio conceptual se describe la formulación de los conjuntos infinitos por parte de Cantor. En seguida se describe la axiomática para los conjuntos, establecida por Zermelo y Fraenkel como medio para resolver las paradojas de la teoría intuitiva cantoriana.

Con base en la axiomática de Zermelo-Fraenkel se describe la construcción conjuntista de los números naturales partiendo del cero a través del conjunto vacío, el uno como el conjunto cuyo único elemento es el vacío, e inductivamente se forma un nuevo natural como la colección de todos los anteriores, lo que permite establecer una relación de orden total por pertenencia de conjuntos y definir recursivamente las operaciones de suma y producto. A través del concepto de clase de equivalencia sobre el conjunto de parejas de números naturales se define el conjunto de los números enteros, extendiendo las operaciones y la relación de orden. Por esta misma vía se incorpora el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Los números reales se definen con base en el concepto de cortadura sobre $\mathbb{Q}$. La descripción de $\mathbb{R}$ como el conjunto de todas las cortaduras de $\mathbb{Q}$, permite demostrar que es el único cuerpo (salvo isomorfismos) totalmente ordenado (con el orden usual), completo, sin puntos finales y que contiene un subconjunto denso numerable.

Esto parecería indicar que se tenía completamente caracterizado a $\mathbb{R}$. Sin embargo, se muestra que aún queda un asunto clave por resolver, el tamaño de $\mathbb{R}$, planteado en la teoría de conjuntos infinitos. Dado que el infinito del conjunto de los números reales es mayor que el infinito del conjunto de los números naturales, se trata de establecer si hay subconjuntos de $\mathbb{R}$, de un infinito entre el infinito de los naturales y el de $\mathbb{R}$. Esto nos conduce a la *hipótesis del continuo*. En la parte final del capítulo se describe la problemática y las dificultades que esta conlleva.

Finalmente, es conveniente anotar que este libro fue elaborado en el marco de la investigación: *La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes*, realizada con el apoyo de Colciencias, proyecto 1106-11-17688, en el que participaron el Grupo de Historia de las Matemáticas (Universidad del Valle - Universidad del Cauca) y el Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle. El equipo de investigación lo componen en su totalidad nueve profesores pertenecientes a diversas unidades académicas de la Universidad del Valle y de la Universidad del Cauca, entre ellas el Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad del Valle y el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas y de la Educación de la Universidad del Cauca.

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

Capítulo 1

OBJETIVIDAD MATEMÁTICA, HISTORIA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Luis Carlos Arboleda[1]

Introducción

Hace veinticinco años, en el marco de las actividades fundacionales de la Sociedad Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, se adelantaron en la región una serie de iniciativas que con el paso del tiempo conformarían un ambicioso programa de enseñanza de la historia de las ciencias. Si bien el objeto principal de estos emprendimientos era contribuir a crear las mejores condiciones de profesionalización de nuestro campo de estudios, en varios congresos y reuniones se hizo usual presentar experiencias de cursos y estrategias educativas en historia de las ciencias, tratando de evidenciar en cada caso un marco de referencia conceptual.

En un artículo de la época[2], al describir el programa de enseñanza de historia de las matemáticas y de las ciencias que adelantábamos con varios colegas en la Universidad del Valle, aproveché para plantear algunas preocupaciones sobre la relación entre historia y enseñanza de las matemáticas. Con el paso del tiempo he constatado que varios de los puntos de vista y estrategias entonces formulados, se han revelado difíciles de aplicar porque los procesos de profesionalización e institucionalización de nuestra área de estudios han tomado rumbos que entonces no podíamos prever. Otros no son más sostenibles, al menos desde la posición conceptual a donde me han

[1] Profesor del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle - Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle.

[2] Arboleda (1984).

llevado mis investigaciones y mis actividades docentes en nuestra área de estudios.

Pero el principal motivo de mi preocupación sobre la relación entre historia y enseñanza de las ciencias sigue estando vigente después de 25 años: ¿Cuál es el tipo de historia susceptible de ser apropiada en la educación matemática y que contribuya efectivamente al diseño de estrategias didácticas para la formación de pensamiento matemático?

La respuesta que más me satisface en la actualidad, es la que ya entonces se esbozaba de manera general: Entre todas las historias practicables prefiero aquella que le permita al alumno vivir experiencias de reconstrucción de teorías.

El criterio de base para mantener inmodificable esta posición es el mismo que sostuve entonces:

> La historia es un medio para tomar conciencia del funcionamiento de la investigación en matemáticas (…) y puede ser utilizada a favor de la formación matemática de quienes enseñarán las matemáticas sin jamás proponerse una investigación en matemáticas.

En el presente trabajo expondré los argumentos de los que ahora dispongo para continuar defendiendo las anteriores ideas. Trataré de mostrar que, al margen de las diferencias de objeto y método que caracterizan una y otra área del conocimiento, hay algunas problemáticas cruciales de la actividad matemática de cuyo discernimiento la historia y la educación pueden sacar provecho. En general se trata de problemáticas relacionadas con la búsqueda de la objetividad matemática y los procesos de constitución de los objetos matemáticos en tanto actividades especializadas de individuos que, enfrentados a la explicación de determinados problemas, movilizan actos de razonamiento de cierta naturaleza.

Comprender las razones de ser de la lógica interna de las teorías matemáticas

En un artículo reciente, consagrado a estudiar las relaciones entre historia, filosofía y educación matemática, Michael Otte señala que

> Uno de los grandes problemas de la educación matemática es el carácter aparentemente estático e infalible del conocimiento matemático. El significado de cualquier cosa se reduce a: $P = P$. Este principio de identidad reside en el corazón de la lógica y de las ciencias exactas, y obviamente va en contravía de toda consideración histórica o evolucionista. ¡P significa sólo P! (Otte, 2007).

Pero en tanto producto de la actividad humana a lo largo del tiempo, las matemáticas no podrían reducirse a la lógica ni a un simple cálculo proposicional. La historia de las matemáticas muestra que esta actividad se adelanta dentro de propósitos determinados y de acuerdo con procedimientos cuyas razones de ser son objeto de la reflexión filosófica y epistemológica. Desde los propios orígenes de la ciencia griega, la filosofía supo reconocer, por ejemplo en el *Teeteto*, que el acto de razón que apunta al conocimiento no puede consistir sólo en expresar la opinión de las cosas en un lenguaje, ya que la razón se refiere a la naturaleza íntima del entendimiento y no solamente a la manera de organizar nuestros enunciados.

Al estudiar los procesos de constitución de objetos, teorías, estructuras, a partir de la actividad de solución de problemas, el historiador de las matemáticas sabe muy bien que los discursos son trazas de construcciones producto de la actividad de matemáticos en situaciones determinadas. Esta actividad es un acto de constitución que difícilmente podría reducirse al mero acto de descubrir algo ya existente. Más adelante volveremos sobre esta problemática de construcción y descubrimiento en matemáticas.

Lo que en este contexto interesa tener en cuenta para la reflexión sobre las relaciones entre historia y educación matemática, es que una vez constituidas las matemáticas parecen obedecer a una lógica interna independiente de sus orígenes. Sin embargo, el trabajo de reconstitución de los orígenes permite aclarar esta lógica interna, siempre y cuando el historiador esté preparado para comprender los intríngulis de esta lógica. En primer lugar, esto significa reconocer que, como ya lo planteaba Frege en su crítica a Kant, la lógica no es irreductiblemente formal. Es decir, no es simplemente un ensamble de formas vacías de contenido, ya que la lógica hereda un contenido semántico de conceptos y relaciones entre objetos del mundo concreto. Es por ello mismo que la lógica puede permitirnos avanzar en el conocimiento y no sólo representar lo ya construido. La generalidad indispensable a la lógica no se traduce en indiferencia con respecto a las características particulares de los objetos.

El asunto delicado, por supuesto, es ponerse de acuerdo en lo que se quiere decir cuando se afirma que la representación lógica de la realidad "hereda contenido semántico". La historia de las matemáticas nos revela que, en su actividad, el matemático parece adoptar espontáneamente el punto de vista de Poincaré sobre lógica y matemáticas, según el cual, no porque las expresiones lógicas se "formalicen" en tratados especializados, pierden el carácter intuitivo que uno les reconoce en los discursos matemáticos. De acuerdo con Poincaré, los principios lógicos no son más que juicios sintéticos disfrazados. Recordemos de paso que esta posición es inaceptable, entre otros, para quienes consideran que la lógica no tiene soporte ontológico y que mal podría fundarse en afirmaciones de existencia.

Como quiera que sea, la sola explicación de la lógica formal de una teoría matemática no da cuenta de aspectos de fondo para la historia o para la educación matemática, como lo es la función que esta misma lógica cumple en el sistema de conocimiento. En consecuencia, el historiador y el educador se ven conducidos a indagar por las razones de ser del proceso de constitución de la teoría. Esta indagación puede, por ejemplo, orientarse a algún tipo de explicación sobre la naturaleza de los problemas a los que tal o cual teoría dan respuesta. Para el caso de reconstrucciones de un campo teórico formalizado, se trataría de mostrar cómo las expresiones particulares de una cultura matemática elemental adquirieron estatus universal al convertirse en propiedades de la axiomática de la teoría.

Afortunadamente cada vez son más frecuentes este tipo de reconstrucciones sobre los orígenes empíricos de las teorías formales. Un caso notable es el curso para filósofos sobre la constitución formal de los sistemas numéricos, dictado durante varios años por Marco Panza en la Universidad de Nantes. De acuerdo con el autor,

> No se trata de enseñar, por ejemplo, que la suma de los números naturales es conmutativa, sino de mostrar cómo la conmutatividad de la suma sobre los números naturales se conecta con un sistema de axiomas y de definiciones dictado por el esfuerzo de fijar la naturaleza lógica de una progresión[3].

Todo matemático, por formalista que sea, está dispuesto a aceptar la importancia que reviste para la enseñanza el trabajo de reconstitución de su teoría. En el capítulo de sus memorias consagrado a reflexionar sobre lo que él llama su “invención” de la Teoría de las Distribuciones, Laurent Schwartz se refiere al fenómeno antes mencionado de que, una vez formalizadas, las teorías ocultan la actividad matemática compleja que las produjo, y propone la intervención de la historia de las matemáticas para ayudar a los lectores a reconocer las huellas de esta actividad[4].

Schwartz observa que generalmente las personas se representan los procesos constitutivos de las teorías de una manera muy diferente a como ocurrieron. La imagen predominante es que “se progresa de principio a fin mediante razonamientos rigurosos, perfectamente lineales, en un orden bien determinado y único que corresponde a una lógica perfecta. No se reconocen los *zig zags*”. Ello es lamentable, dice Schwartz, porque si se considera que en las matemáticas y las ciencias en general no hay derecho a dudas y errores, entonces ellas serán percibidas como demasiado rígidas, menos humanas y más inaccesibles.

---

3 Panza (2007).

4 Schwartz (1997). Ver sobre este tema el capítulo « L’invention des Distributions », pp. 223-266.

Por el contrario, en el desarrollo de una indagación sobre un problema, lo más frecuente es que la respuesta demore en obtenerse. Generalmente después de una primera investigación, viene la fatiga. A veces se continúa pero sin éxito:

> Y se guarda el problema en alguna parte de la cabeza para reflexionar sobre ello más tarde. De pronto se encuentra algo, pero tal vez no es necesariamente interesante y no merece desarrollarse ni publicarse. Así, uno puede continuar planteándose cuestiones conexas o incluso diferentes, hasta conformar un acervo de interrogantes. A menudo se encuentran soluciones simultáneas a muchos de tales problemas.

Más adelante, Schwartz vuelve a referirse a la necesidad de ir más allá de las primeras apreciaciones sobre la naturaleza del trabajo científico, y fija de la siguiente manera una posición que nos suena a música celestial a historiadores y educadores de las matemáticas:

> El lector que lee un libro bien escrito no reconoce cuáles han sido las alegrías y sufrimientos de su autor. Puede ser instructivo develárselas. No se dispondría de tiempo en el liceo para estudiar las ciencias junto con su historia. La mayor parte del tiempo es necesario enseñar de manera imperativa y dogmática. Pero de tiempo en tiempo se debería hacer no solamente que los alumnos investiguen, sino también que conozcan la historia de las ciencias. Un poco de historia resulta fecundo en la exposición de una teoría nueva. Y no se hace suficiente historia de las matemáticas con los alumnos del liceo, como para mostrarles la extensión de los espacios franqueados por nuestros predecesores hasta llegar al estado actual de perfección. Igualmente es necesario que sepan que si una teoría está bien hecha aunque algunos aspectos suyos permanezcan inciertos, probablemente éstos serán los más interesantes para futuras investigaciones. El propósito de una ciencia no es atragantar con ideas bien hechas y bien acabadas, sino imaginar concepciones nuevas. Y éstas generalmente se engendran al superar obstáculos internos.

Indagar sobre modalidades de objetivación de teorías concretas: el caso de los reales[5]

Tomemos por caso la presentación de una teoría tan fundamental para la formación matemática de la educación media superior y universitaria como el sistema numérico de los reales. De acuerdo con lo anterior, el objetivo inmediato no sería tanto enfrentar directamente al estudiante con las propiedades algebraicas de este sistema en tanto cuerpo ordenado arquimediano y completo. Más bien se trataría de permitirle, a través de experiencias didác-

5 Un estudio más detallado de las ideas expuestas en este y otros apartes, se encuentra en Arboleda (2007).

ticas diseñadas con un uso adecuado de la historia, que tome conciencia de las condiciones históricas y epistemológicas que posibilitaron la constitución de los números reales como objeto matemático.

El historiador de las matemáticas es bien consciente de que éste es uno de los asuntos que mayormente ha jalonado el desarrollo de las matemáticas, desde la geometría de los griegos, pasando por el álgebra de los árabes, la geometría cartesiana, el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz, el análisis de Euler, Lagrange, Fourier y Cauchy, la aritmetización de Bolzano, Dedekind y Weierstrass, la teoría de conjuntos y la topología de Bolzano, Cantor y Dedekind, la teoría de funciones de Baire, Borel, Lebesgue y Fréchet, y la fundamentación de la aritmética de Peano, Frege y Russell.

Sin embargo, este largo proceso de objetivación de $\mathbb{R}$ escapa a la escolaridad. En el grado 11 de la educación media, en donde sería más pertinente que se presentaran los fundamentos de la construcción de los números reales, el problema se deshace en una presentación seudo formal. En la formación básica universitaria, $\mathbb{R}$ se introduce de manera axiomática y el estudiante termina por no entender la naturaleza y función de las propiedades de $\mathbb{R}$, tanto en su propia objetivación matemática como en la estructuración de las teorías sobre los reales que constituyen el referente principal del currículo universitario.

Esta presentación axiomática formal en la cual se diluye la necesidad de dar cuenta de cualquier característica del proceso de objetivación de $\mathbb{R}$, es un procedimiento "natural" empleado por los docentes para presentar los reales. Como ocurre en otras instancias de la didáctica inercial que domina en la escuela, una enseñanza se vuelve natural e incuestionable cuando se ha revelado insustituible a lo largo de muchos años. Y si algunos le reconocen dificultades epistemológicas y pedagógicas a este enfoque, no es menos cierto que otras presentaciones del pujante campo de investigaciones históricas y didácticas sobre los reales, o bien no son suficientemente conocidas por los docentes o no son percibidas como alternativas con capacidad de organizar el currículo y las prácticas escolares.

Así, pues, dado que el estudiante sólo tiene una idea "intuitiva" de algunas de las propiedades de $\mathbb{R}$ por sus cursos de álgebra elemental y ante la obligación de exponer los fundamentos del cálculo infinitesimal, termina por imponerse una presentación seudo formal en la cual se toman los reales como "elementos primitivos" y se axiomatizan algunas de sus propiedades más importantes del cálculo, sobre todo aquellas que no son tan familiares al lector como el axioma de continuidad o del extremo superior. Este es el punto de partida del cálculo de Apostol, uno de los textos que más ha influido en la enseñanza universitaria en los últimos treinta años dada su reputación de obra esmerada y rigurosa. No obstante, Apostol no deja de reconocer que este procedimiento de la enseñanza no es totalmente riguroso a nivel epistemológico, y que:

> Un estudio en sí mismo del sistema de los números reales llevado a cabo como una totalidad, es un tema muy interesante pero un tanto largo, de forma que requiere un pequeño volumen para su completa exposición[6].

Para el historiador, un estudio de estas características está orientado sobre todo a mostrar un aspecto esencial de la objetivización de los reales y de las matemáticas en general: que los axiomas y al menos ciertas propiedades elementales de su estructura, formalizan técnicas y procedimientos operatorios que se encuentran sedimentados en la experiencia humana de siglos de reflexión sobre la naturaleza del continuo real, los cuales, bajo determinadas condiciones del contexto de las matemáticas de la segunda mitad del siglo XIX, se reactivaron y dieron lugar, primero a las construcciones de $\mathbb{R}$ y, luego, a la formalización de $\mathbb{R}$ como objeto matemático. Por fuerza debemos hacer algunas consideraciones matemáticas sin las cuales no es posible entender el sentido epistemológico de la cuestión, aunque en esta exposición no viene al caso entrar en los detalles técnicos.

En los procedimientos históricos empleados en la extensión de números racionales $\mathbb{Q}$ a los reales $\mathbb{R}$, sea por las cortaduras de Dedekind o mediante las sucesiones fundamentales de Cantor, el matemático apeló a propiedades de la estructura de $\mathbb{Q}$ para llenar dos lagunas operatorias de vieja data, una de naturaleza algebraica ($\mathbb{Q}$ no es cerrado por la operación raíz cuadrada) y otra topológica ($\mathbb{Q}$ no es cerrado con la operación de paso al límite)[7]. Dado que las propiedades de orden y densidad de la estructura de $\mathbb{Q}$ se cumplen de manera correlacionada, no fue posible llenar la laguna algebraica sin llenar al mismo tiempo la laguna topológica. En breve, la extensión de los racionales consistió, en última instancia, en construir el dominio de los reales como objeto explícito a partir de operaciones permitidas por la estructura de los racionales, principalmente de orden y densidad.

El momento decisivo en el proceso de construcción de $\mathbb{R}$ a partir del dominio previo $\mathbb{Q}$, tiene que ver con la exigencia de hacer intervenir una operación entre racionales que genere a los reales como representantes de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales. Esta operación es compatible con la estructura de $\mathbb{Q}$ y determina el dominio de existencia de $\mathbb{R}$. Todo esto aparecerá luego encapsulado en el cuerpo de la teoría axiomática de los reales, principalmente en un teorema que es una cruz de los cursos universitarios de análisis:

> Una sucesión $\{s_n\}$ de números reales es convergente (con un número real como límite) si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

6 Apostol (1972, p. 12).

7 Desanti (1968).

A lo largo de una penosa familiarización con técnicas y procedimientos formales, el estudiante termina en el mejor de los casos por apropiarse de un teorema que es piedra angular de su cultura matemática, sin que este conocimiento esté fundamentado en algún tipo de experiencia que le permita entender la naturaleza del proceso de objetivación de $\mathbb{R}$. Para ello habría tenido que ejercitar un abordaje histórico-epistemológico de la extensión de $\mathbb{Q}$ con un patrón de razonamiento que cumpliera exigencias lógicas como las siguientes:

a) Resolución de un problema; en este caso, llenar las lagunas operatorias de $\mathbb{Q}$
b) Utilización de procedimientos de investigación; es decir, movilizar técnicas y procedimientos operatorios definidos sobre $\mathbb{Q}$
c) Creación de un objeto matemático nuevo; o sea obtener a $\mathbb{R}$ como extensión de propiedades de la estructura de $\mathbb{Q}$
d) Autonomización del nuevo objeto; es decir, constatar que $\mathbb{R}$ adquiere, en la teoría formal, una realidad independiente de las circunstancias previas en que fue introducido.

El docente que se priva en su práctica de utilizar este patrón de razonamiento objetivo, olvida que el mismo Hilbert, la persona responsable de la moderna axiomatización de los reales[8], fue explícito sobre el valor pedagógico de estudiar las circunstancias previas de constitución de los objetos matemáticos. Hilbert decía que hay dos maneras de considerar a $\mathbb{R}$:

a) Según el método genético: Por sucesivas extensiones del campo numérico hasta llegar a la cortadura o sucesión fundamental
b) Según el método axiomático: Partiendo de un dominio de objetos que cumplen un sistema de axiomas que reglan relaciones entre ellos, y mostrando la consistencia y completitud del sistema.

El método genético, dice Hilbert, tiene un gran valor pedagógico y heurístico. Por su parte, el método axiomático es el más indicado para la investigación lógica sobre los fundamentos de las matemáticas y sus aplicaciones; en particular, un asunto prioritario para el programa de Hilbert de comienzos del siglo XX era estudiar las condiciones que garantizan que la aplicación de los axiomas de una teoría no conduzcan a contradicción, o lo que es lo mismo, que el sistema de axiomas sea lógicamente consistente. Hilbert ciertamente creía que la existencia matemática de los números rea-

8 Bernays, citado por H. Sinaceur en su comentario a la edición del artículo de Hilbert, “Sur les fondements de la logique” en: Rivenc et Rouilhan (ed.) (1992, p. 251).

les dependía de la prueba directa de no contradicción de los axiomas que le aseguran a $\mathbb{R}$ su estructura de cuerpo ordenado arquimediano y completo.

Pero, al mismo tiempo, Hilbert sabía que el concepto de número (real) no se podía subsumir en una reducción lógica y que era “absolutamente necesario tomar en consideración el recurso a una donación intuitiva de la sucesión de números y de la multiplicidad de magnitudes”[9]. Contrariamente a las concepciones de Dedekind, Frege y otros logicistas, Hilbert declaraba estar convencido de “que ciertas representaciones e ideas intuitivas son previamente necesarias a la posibilidad del conocimiento científico”[10].

El repaso anterior al interesante capítulo de la historia de las matemáticas sobre la formalización de los números reales, nos ofrece una serie de consideraciones útiles para la enseñanza. En primer lugar, insistamos en el hecho de que las matemáticas no podrían reducirse a la lógica, a un simple cálculo proposicional, según el argumento del *Teeteto* anteriormente citado. Más allá de la importante labor que consiste en levantar repertorios de resultados en tratados y publicaciones, la historia de las matemáticas y, en general, la historia de las ciencias, se enfoca en la comprensión de los procesos de constitución de objetos, teorías y estructuras matemáticas.

Valorar adecuadamente el papel de las concepciones de los matemáticos en su actividad

Es bien conocido que muchos matemáticos han compartido y comparten la creencia de que sus objetos poseen una “realidad profunda”. A los historiadores matemáticos nos resulta particularmente útil en el estudio del desarrollo de las matemáticas como actividad humana, considerar la naturaleza y función de las concepciones de los matemáticos en su trabajo. Igualmente, los educadores matemáticos no pueden prescindir de este componente ideológico en el diseño y ejecución de estrategias viables de intervención en el aula, al cual lo ubican en el mundo de la noosfera, una dimensión de las ideas tan importante para la educación como el mismo mundo de los saberes matemáticos.

Así, pues, a historiadores y educadores nos resultan particularmente llamativas profesiones de fe como la de Laurent Schwartz en sus memorias, cuando afirma que esta “realidad profunda” se manifiesta ante todo en que los conocimientos matemáticos, una vez adquiridos, se organizan dentro de un campo de conciencia dotado de una “estructura rígida”. Además de responder a una lógica interna, el campo de conocimientos que conforma el patrimonio intelectual del matemático está regido por un ideal de belleza; de ahí que Schwartz hable de tal campo en términos de “mi palacio o castillo interior”.

9 Bernays, citado por H. Sinaceur en: Rivenc et Rouilhan (ed.) (1992, p. 251).

10 Citado por Sinaceur en: Rivenc et Rouilhan (ed.) (1992, p. 251).

Para Schwartz, no es posible hacer matemáticas, es decir, recorrer cierto camino dentro del campo (como consecuencia de la acción de una red de conexiones neuronales), si no se respeta la estructura ordenada. Cualquier intento de transgredir este orden conservador es visto por la conciencia como una agresión del exterior. Si se plantea por la necesidad de incorporar un conocimiento nuevo, tomará tiempo a la conciencia asimilar tal necesidad, pues ello implica "reordenar toda una serie de fenómenos e imbricar lo que acabo de aprender en mis propios esquemas. Mi castillo estará entonces más perfeccionado que antes".

Los objetos matemáticos, dice Schwartz, poseen una "realidad profunda" que se impone a nuestro entendimiento. Descubrimos los enteros, los primos y su ley de distribución, los racionales, los números e y π, la recta, etc. Pero las operaciones de "descubrimiento" *e* "invención" se interrelacionan en la constitución de conceptos o teorías. Un objeto matemático que se manifiesta en un primer momento como resultado de una invención o hallazgo de algo nuevo —algo que no existía antes y sobre lo cual tenemos gran libertad de escogencia, pasa luego a convertirse en descubrimiento— es decir, en hallazgo de algo externo a nosotros frente a lo cual disponemos de mínimas posibilidades de escogencia.

Se puede considerar a los complejos como una invención desde el punto de vista de su representación $x + iy$. Pero en cuanto demostramos que el anillo de los polinomios reales módulo $(x^2 + 1)$ es un cuerpo que denotamos por C, entonces se nos impone C con las leyes de su estructura. Las teorías de Weierstrass y Cauchy sobre las funciones holomorfas, el teorema de residuos y el teorema de Picard nos permiten descubrir la realidad profunda de C y comunicarla a los matemáticos del mundo (incluso a extraterrestres inteligentes, como sugería Freudhental) mediante el uso de otras invenciones tecnológicas.

La convicción sobre la existencia independiente o "realidad profunda" parece incluso imponerse a la conciencia constructiva que resulta de la propia experiencia. Independientemente de cómo el matemático se represente y estudie sus objetos, éstos terminan por imponérsele por las leyes de su estructura, como reconoce el propio Schwartz. Esta es una actitud corriente entre los matemáticos, por lo menos a partir de las profundas transformaciones operadas en los procesos de generalización y diversificación de estructuras del siglo XIX, y ha sido identificada como característica del "platonismo ingenuo" de los matemáticos. En palabras de Hermite en carta a Stieltjes[11]:

[11] Baillaud, B. y Bourget, H. (ed.) (1905). En este mismo sentido se puede citar la carta 166 sin fecha: "Confieso que no admito ninguna solución de continuidad, ninguna ruptura, entre las matemáticas y la física, y que los números enteros me parece que existen por fuera de nosotros y que se imponen con la misma necesidad y la misma fatalidad que el sodio, el potasio, etc." Op. cit., vol. 1, pp. 331-332. Ver también las interesantes cartas que sobre esta cuestión dirige Hermite a Mittag-Leffler el

> Creo que los números y las funciones del análisis no son el producto arbitrario de nuestro entendimiento; pienso que existen por fuera de nosotros con el mismo carácter de necesidad que las cosas de la realidad objetiva, y los reencontramos o los descubrimos, y los estudiamos, como los físicos y los zoólogos.

La historia de las matemáticas nos permite constatar que opiniones como ésta han sido objeto de reparos de distintas clases. Por ejemplo, alguien desde una orilla próxima a una ontología logicista, podría estar de acuerdo con Hermite en que los objetos de la matemática (en concreto los números y las funciones del análisis) no son un producto arbitrario de nuestro entendimiento y que existen independientemente de nosotros e independientemente de sus modos de representación. Pero su existencia, como dice Gardies[12] en la misma línea de ideas de Frege, dista mucho de ser comparable a la existencia de los objetos de los físicos, los zoólogos, los botánicos o los geógrafos. Estos últimos pertenecen al primer orden de existencia, en el sentido de que sus propiedades constitutivas se expresan en predicados de sustancias primeras. Por su parte, la existencia objetiva de los números y las funciones no podría ni siquiera equipararse con la existencia de los objetos de la geometría euclidiana, pues sus propiedades constitutivas se expresan en términos de predicados de predicados en la lógica de segundo orden.

Desde nuestra posición sobre la constitución de las matemáticas a partir de la explicación de problemas o fenómenos de la realidad natural, el carácter particular de los objetos matemáticos con respecto a otros cuya existencia está más "próxima" de esa realidad, radicaría en lo que Thurston ha llamado su "abstracción hipostática"[13]. Esto es, que los actos de razonamiento que conducen al nuevo objeto están encadenados de tal manera, que un razonamiento de nivel inferior es objeto de otro de nivel lógico superior y así sucesivamente, como ocurre con la extensión de los sistemas numéricos.

Las tematizaciones sucesivas incorporan no solamente propiedades de objetos de los niveles previos, sino fundamentalmente técnicas y procedimientos de generalización. Según Otte, la abstracción hipostática implica abstracción a partir de la acción, más que de los mismos objetos. De aquí se pueden derivar al menos dos consideraciones de interés para las estrategias educativas de formación de pensamiento matemático. La primera es que la abstracción hipostática conlleva una tremenda economía de pensamiento. La segunda tiene que ver con la necesidad de precisar la expresión "construcción matemática" que se utiliza frecuentemente para designar este tipo

24 de diciembre de 1880 y el 28 de noviembre de 1882. En: Hermite, Ch. (1984, pp. 49-285).

12 Gardies (2004).

13 Thurston (1990), citado en Otte (2007, p. 246).

particular de procesos de abstracción. En lo que sigue vamos a desarrollar ambas ideas.

Hemos comentado anteriormente que el platonismo ingenuo parece relacionarse con el sentimiento de los matemáticos de que una vez emerge el nuevo objeto, su existencia parece imponerse únicamente por las leyes de la estructura formal. La estructura encapsula y hace opaca la laboriosa actividad humana desplegada en su constitución. Nadie como el propio matemático para dar testimonio de este fenómeno. En un artículo dirigido a mostrar que la educación matemática no podrá hacer avances sustanciales en sus propósitos si no entiende la naturaleza de las matemáticas, Thurston se refiere al fenómeno antes mencionado:

> Las matemáticas son de una admirable compresibilidad. Durante un período largo se trabaja de manera ardua, paso a paso y desde distintos enfoques, en un proceso o idea. Pero una vez se entiende realmente (la cuestión) y se dispone de la perspectiva mental para considerarla en su conjunto, a menudo se presenta una tremenda compresión mental. Se la puede registrar por separado, recordarla inmediatamente cuando sea necesario, y utilizarla simplemente en un paso de algún otro proceso mental. La perspicacia (insight) que acompaña esta compresión es uno de los mayores disfrutes de las matemáticas.

El ideal de lo simple en la inteligibilidad matemática

Para los matemáticos la presentación axiomática de las estructuras es un recurso obligado precisamente por la inigualable percepción que ella ofrece de conocimiento global y de economía de pensamiento. Esta creencia fundamentó el ambicioso programa estructuralista de investigación y formación avanzada que promovió la escuela matemática francesa de los Bourbaki alrededor de las décadas de 1930 y 1940 a nivel internacional. En el artículo sobre la *Arquitectura de las matemáticas* que Bourbaki incluye en la obra colectiva de Le Lionnais[14], aclara su posición de por qué las estructuras son un dispositivo obligado de investigación.

Las estructuras y los sistemas axiomáticos expresan de la manera más general posible propiedades simples de distintas teorías particulares, y regularidades de fenómenos diversos del mundo social y natural. Cuando un matemático está en condiciones de apropiarse de estos instrumentos teóricos, dispone de un poderoso arsenal de teoremas de capacidad de explicación múltiple. Este tipo de matemáticas implica una economía de pensamiento con respecto al trabajo laborioso y solitario de otras épocas, disperso en problemas y disciplinas sometidas a hipótesis restrictivas y particulares.

14 Le Lionnais, F. (ed.) (1948, p. 42).

> Si en nuestra época hemos dado saltos espectaculares (dirá años después Dieudonné, una de las cabezas visibles de los Bourbaki), es porque el arsenal de nociones abstractas de que disponemos nos ha permitido concentrarnos en los aspectos de fondo, dejando de lado los detalles superficiales.

En esto consiste el "sentido del análisis" (Dieudonné, 1968, prefacio): en concentrarse en los principios más que en el cálculo. Uno de los primeros momentos de la historia de las matemáticas en los cuales se hizo evidente este fenómeno, fue cuando Félix Klein introdujo el enfoque estructural para el estudio de la geometría en su famoso *Programa de Erlangen* de 1872 (Klein, 1974). A partir de entonces una geometría no es otra cosa que el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones. La geometría euclidiana queda estudiada por el grupo de transformaciones de los movimientos rígidos, la geometría afín por el grupo de translaciones, la proyectiva por el de las proyecciones, la topología por el de las funciones continuas con inversa continua.

La noción de estructura algebraica producirá ese efecto de reorganización y compresión teórica de las geometrías al que se refiere Thurston. Toda la historia de más de veinte siglos de esfuerzos separados por estudiar geometrías en campos disciplinares distintos quedará reducida a la economía de la clasificación jerárquica de las geometrías en términos de su correspondiente estructura algebraica. Así, los matemáticos dirán simplemente que la geometría afín y la ortogonal, las no euclidianas y la euclidiana, son subgrupos del grupo proyectivo. O, en otras palabras, que las tres geometrías clásicas de curvatura constante comparten la misma estructura del grupo proyectivo. En este contexto, Klein hace la siguiente afirmación que hoy podría parecernos chocante pero que, al margen de todo juicio de valor, revela apropiadamente las creencias de los matemáticos:

> Las concepciones de las que nos ocupamos y cuya conexión íntima estudiamos son en sí mismas productos de un trabajo prolongado del pensamiento matemático, y están muy alejadas de los pensamientos que se utilizan de manera corriente en la vida.

Por otra parte, si consideráramos esta opinión desde una metáfora cualquiera de la construcción, a lo que Klein estaría apuntando es a subrayar que la actividad matemática no es una construcción como cualquier otra. Punto éste de indudable significación para la educación matemática, pero también para la historia. En efecto, la palabra *construir*, como lo ha observado Gardies (Gardies, 2004, p. 131 *et ss.)*, nos remite a la actividad de un sujeto que elabora un objeto que antes no existía, por medio de cierto arte. Esta actividad constructiva supone una doble existencia, la existencia de un constructor y la existencia de un material inicial. Sólo que a diferencia de una casa o incluso de un producto más elaborado como la estatua de David, no es tan evidente que el contenido de una teoría deductiva conserve la homogeneidad de una supuesta materia originaria.

Ya antes hemos aludido a esta cuestión al referirnos al carácter lógico de los procedimientos constructivos de las teorías deductivas. Enrico Giusti nos puede ayudar a aclarar esta idea (Giusti, 2000). Los objetos matemáticos provienen, no de abstracciones de objetos reales, mediante la descripción de sus características principales, sino de un proceso de "objetivación de procedimientos". Por ejemplo, hay toda una cultura educativa que consiste en afirmar que existe una correspondencia estrecha entre los objetos de la geometría euclidiana y las operaciones del agrimensor. Proposiciones como la definición 4 del libro 1 ilustran este carácter naturalista de la construcción euclidiana. Recordemos que tal definición nos dice que "la línea recta es la que yace por igual respecto de sus puntos".

La historia de la tradición pre-euclidiana nos permite reconocer que para distintos autores de esta época la línea recta era la distancia mínima entre sus dos extremos porque, entre todas las líneas, es aquella que está tensionada al máximo. La idea de tensión uniforme de la cuerda entre sus dos puntos habría sido sustituida, en la definición euclidiana, por la idea de "yacer por igual entre sus puntos". En cierto sentido, la definición euclidiana formaliza operaciones sobre el terreno, pero igualmente responde a la necesidad de liberarse de la referencia a las ideas de métrica y tensión física.

La abstracción es la cristalización en un pequeño número de rasgos invariantes de las numerosas operaciones efectivamente realizadas. Pero los otros objetos de la geometría clásica (circunferencia, esfera, cónicas, curvas, etc.), se construirán por procedimientos cada vez menos materiales y cada vez más mentales en el marco de estructuras teóricas. El enunciado del postulado 1 de los *Elementos* de Euclides garantiza un procedimiento para trazar una línea recta de un punto a cualquier otro. Por su parte, en los *Fundamentos de la Geometría*, Hilbert traduce los procedimientos técnicos euclidianos en afirmaciones de existencia. En efecto, el axioma I,1 afirma: "Existe una recta asociada a dos puntos *A* y *B* a la cual pertenecen estos dos puntos". El axioma I,2 afirma que "no existe más de una recta a la cual pertenezcan dos puntos *A* y *B*". De manera que la modalidad de la construcción hilbertiana de la geometría es distinta a la euclidiana.

Así mismo, la construcción deductiva de la aritmética es diferente a la de la geometría. A partir de Cantor y Frege los números son, ya lo hemos señalado, predicados de predicados. En la edificación de los sistemas numéricos hay una elevación progresiva de los órdenes lógicos de existencia. Los números naturales se construyen mediante una relación de equivalencia sobre el dominio de las magnitudes. A partir de los naturales se edifican lógicamente, unos a partir de otros, los relativos, los racionales y los reales. A diferencia de la existencia en el mundo de los objetos sensibles, en la aritmética la existencia en los distintos niveles apela únicamente a cuantificadores universales. Cada sistema numérico, en particular los naturales, se caracteriza tan sólo por las propiedades de su estructura, prescindiendo totalmente de la naturaleza de sus elementos.

El patrón común a la colección de naturales consiste en postular tres condiciones: una relación de sucesor entre sus elementos, la existencia de un primer elemento único, y el principio de inducción. En rigor, el número 2 no es otra cosa que la segunda posición en la estructura de los naturales, el 6 es la sexta posición, etc. Es decir, que los números no poseen una realidad ontológica independiente sino una especie de identidad estructural. Richard Dedekind, quien introdujo de manera sistemática este enfoque estructural en la aritmética, es responsable de la creencia, muy común entre los matemáticos y docentes, de adjudicarle a la imaginación el poder de sustituir el arduo trabajo de las actividades constitutivas:

> Considerando esta liberación de sus elementos con respecto a cualquier contenido (abstracción), se puede llamar a los números, con derecho, creación libre del espíritu humano[15].

La edificación de los sistemas numéricos es un caso significativo de los procesos de abstracción hipostática en matemáticas, o modalidad constructiva por medio de una "cascada de tematizaciones". Según Jean Cavaillès, quien introdujo el término para distinguir la edificación lógica de las teorías de una simple generalización, la *tematización* es el proceso por el cual una operación que previamente se ha realizado sobre un campo de objetos, es objeto de una segunda operación, la cual se vuelve a su vez objeto de una tercera operación, y así, sucesivamente[16].

El arte específico de la construcción matemática es la tematización. Pero a los objetos matemáticos no se llega por abstracciones de objetos reales mediante la descripción de sus características principales, sino por un encadenamiento de operaciones lógicas que se realizan sobre dominios matemáticos pre constituidos. Entonces es permisible hablar de construcción matemática si tenemos en cuenta que los objetos matemáticos cuya existencia se dice que ha sido construida presuponen modos previos de existencia, y que el contenido de estos "constructos" no es homogéneo con algún material originario.

Nosotros creemos firmemente que una historia de las matemáticas con este enfoque, contribuye a la comprensión de lo simple de la definición formal recreando las características objetivas de la actividad matemática constructiva. Estamos convencidos de que el efecto educativo de esta estrategia

---

15 Dedekind (1888).

16 Cassou-Noguès (2001).

es muy superior al de aquellas didácticas que se fundamentan en exhibir situaciones concretas que justifican la definición formal. Esta modalidad de apropiación de la historia es objeto en este momento de las más fecundas investigaciones en enseñanza de las matemáticas a nivel internacional. Rudolf Bkouche ha resaltado la importancia de esta historia particularmente en cuanto la inteligibilidad de lo simple de la construcción estructural se logra en el contexto de la comprensión global de la actividad matemática constructiva.

La siguiente cita de Bkouche me permite reencontrar la pregunta de la introducción de esta charla, sobre el tipo de historia de las matemáticas más apropiada para la formación de pensamiento matemático:

> Es justamente el rol de una reflexión epistemológica sobre la significación de la simplicidad en la ciencia lo que puede permitirle a quien enseña tomar en cuenta en su enseñanza la construcción de esta simplicidad y conducir a quienes son enseñados a comprender el sentido de esta simplicidad, a comprender hasta qué punto la construcción de esta simplicidad es difícil, pero a comprender también por qué vale la pena echarse encima tal dificultad [17].

Objetividad y apropiación de teorías en contextos diversos: una historia dual para la educación matemática

Los historiadores y los educadores interesados en la formación de pensamiento matemático en entornos concretos, sabemos muy bien que los estudios históricos regionales le proporcionan al educador matemático motivos inspiradores para su quehacer, en cuanto permiten apreciar, por ejemplo, los esfuerzos de nuestros antecesores para viabilizar en colegios y universidades una enseñanza de las matemáticas según el ideal de rigor antes mencionado.

En búsqueda de la respuesta más adecuada a los interrogantes planteados en la Introducción de este trabajo, hay que señalar que en estos últimos veinticinco años hemos producido con varios colegas de la región diferentes estudios sobre distintos episodios de la formación de cultura matemática en los fundamentos rigurosos del análisis en Colombia y otros países. Voy a referirme a uno de mis trabajos más recientes en esta línea que viene a complementar mis preocupaciones filosóficas y epistemológicas de carácter general sobre objetividad matemática y constitución de objetos matemáticos. Se trata de una investigación sobre la enseñanza, realizada por el ingeniero Jorge Acosta Villaveces en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia durante las décadas de 1930 y 1940, la cual tiene como hecho significativo el haber dado lugar a la publicación del primer texto colombiano de Análisis Matemático, en 1951, que más se aproximaba en su momento a un patrón moderno de rigor [18].

17 Bkouche (1997).

18 Arboleda (2010).

Durante los cien años que van desde que el ingeniero francés André Bergeron enseñó su curso de cálculo diferencial en el Colegio Militar de Bogotá, hasta la publicación del libro de Acosta en la Universidad Nacional de Colombia, se aclimató en el país una cultura sobre los fundamentos del análisis de corte esencialmente francesa. Los planes de estudio de los colegios e instituciones universitarias legitimaron esta influencia, por lo menos en lo que se refiere al último año de la formación en cálculo diferencial, integral, ecuaciones diferenciales (en épocas más recientes) y mecánica racional. En nuestras instituciones circularon textos de análisis de varias generaciones que venían precedidos del prestigio de haber sido empleados para la enseñanza en escuelas y facultades francesas.

Sin embargo, las concepciones de los pioneros de esta enseñanza, las prácticas pedagógicas de naturaleza operatoria e instrumental, los débiles intercambios con los medios matemáticos internacionales, la precariedad de monografías y memorias originales en nuestras bibliotecas y la casi inexistente demanda interna de conocimientos avanzados en matemáticas puras y aplicadas, favorecieron que esta cultura llevara la impronta del libro más influyente del período estudiado por nosotros: el curso de Sturm, una obra de segunda generación en los fundamentos del análisis que si bien fue apropiada para la enseñanza del cálculo por parte de Garavito a comienzos del siglo XX, treinta y cuarenta años después ya no correspondía al patrón europeo de enseñanza moderna del análisis.

El estudio de este anacronismo tiene la mayor importancia tanto para la historia como para la educación matemática en Colombia. Nos interesa indagar por las circunstancias en las cuales prevaleció la enseñanza del Sturm y no fue posible reemplazarla por cursos de tercera generación como el Goursat o el Humbert. Estos libros se encontraban de tiempo atrás en las bibliotecas públicas y privadas en donde nuestros profesores y estudiantes más aventajados los consultaron para su formación personal; pero no por ello se generó algún interés en apropiarse de tales obras para transformar cualitativamente las muy conservadoras prácticas pedagógicas.

Una situación algo distinta se presentaba por la misma época en otros países latinoamericanos. En Perú, por ejemplo, en donde el estudio de las matemáticas en la Universidad Católica de Lima era entonces reconocido por su alto nivel, se publicó en 1945 un completo curso de análisis matemático, en dos volúmenes. Por su factura esta obra parece ubicarse en el nivel de tercera generación. Su autor, Cristóbal Losada y Puga, catedrático de esa universidad y célebre hombre público, se doctoró en ciencias matemáticas en la Universidad de San Marcos, de Lima, en 1923, con una tesis sobre teoría de curvas. También se graduó de Ingeniero de Minas en la Escuela de Ingenieros. Como resultado de la enseñanza de varios años en estas instituciones y en la Universidad Católica, produjo su *Curso de Análisis Matemático*, tal vez la más conocida de sus publicaciones.

En el prólogo, Losada y Puga explica que éste se originó en la necesidad de "poner al alcance de mis alumnos aquellos puntos teóricos que no suelen encontrarse tratados en los textos corrientes de cálculo"; se refiere a los fundamentos de la teoría de conjuntos, la teoría de los números reales y la teoría de funciones continuas. En particular reconoce las filiaciones de los capítulos de su tratado sobre las funciones continuas, con el "gran *Cours d'Analyse Mathématique* del maestro francés Édouard Goursat".

También dice haber consultado en la elaboración de su libro todos los tratados clásicos de análisis franceses que "como todos lo saben y reconocen, (es en esto) la maestra del mundo". El curso de Losada y Puga responde al *desideratum* de su autor de presentar a sus alumnos, en español, "una exposición amplia y rigurosa del Análisis, que permita abordar primero el estudio de las obras monográficas y luego el de las memorias originales de los investigadores, así como por otra parte resolver las cuestiones —a menudo arduas— que plantean las ciencias aplicadas".

Sin embargo, una obra como la de Losada y Puga, que en la introducción se reclamaba del paradigma francés de tratado moderno de análisis y que, tanto por la claridad y rigor de su exposición como por la calidad de su edición, aspiraba a justo título a servir de texto de enseñanza en el Perú y en otros países, apela de hecho a principios intuitivos en la explicación de los fundamentos del cálculo, contraviniendo así el programa europeo de expresar tales fundamentos estrictamente en principios lógicos y aritméticos.

Para el historiador y el educador matemático interesados en el desarrollo del pensamiento matemático formal en nuestros países, es significativo tener en cuenta casos de apropiación del patrón europeo de rigor con las libertades y el sentido práctico que imponían las circunstancias de nuestras instituciones de la época. Losada y Puga en Perú y Acosta Villaveces en Colombia, diseñaron y aplicaron estrategias pedagógicas apelando a la intuición geométrica de lo infinitesimal cada vez que ello les pareció necesario en la enseñanza, incluso siendo conscientes de que al hacerlo iban en contravía de uno de los propósitos centrales del patrón de texto francés.

De lo anterior se deriva una consideración de método que puede ser útil al educador matemático en nuestros países. Examinar el rigor con el cual se ha organizado el material de los cursos de cálculo en su enseñanza, en contextos institucionales distintos como las universidades de Bogotá, Lima y París y en determinados momentos históricos, no es una cuestión que admita respuestas simples o uniformes.

En resumen, abogamos por el efecto pedagógico que tiene la combinación de al menos dos tipos de historias de las matemáticas: la historia que apunta a reconocer las actividades de razonamiento que subyacen a la constitución de los objetos matemáticos, y los estudios históricos que explican las estrategias de formación de pensamiento matemático puestas en práctica en ciertos momentos significativos de la historia de la educación en nuestros países.

Creo que este el mismo punto de vista que hace veinticinco años nos facultaba para imaginar un programa de historia y educación matemática y ciencias que permitiera, de una parte, tomar conciencia de la actividad de investigación matemática en general y, por otra parte, proveer recursos para recrear tal actividad en ambientes escolares. Esta historia, por lo menos dual, puede abrir nuevas líneas de indagación para la investigación pedagógica, sobre todo en un momento en que se manifiesta tanta inconformidad entre los actores sociales de la educación por el fracaso de la institución escolar en el cumplimiento de las metas de formación de capacidades de pensamiento matemático autónomo en nuestros países, y cuando los propios docentes se debaten en toda suerte de insatisfacciones y perplejidades frente a las estrategias pedagógicas que movilizan en el aula, todas ellas subsidiarias de una didáctica de transmisión autoritaria de saberes seudo formales.

Bibliografía

Apostol, T. (1972). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (Vol. I). Barcelona, Buenos Aires, México: Editorial Reverté.

Arboleda, L.C. (1984). Historia y enseñanza de las matemáticas. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología,* 1 (2), 194-167.

Arboleda, L. C. (2007). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Especial No. 1 - Festschrift Ubiratan D'Ambrosio; pp. 215-230.

Arboleda, L.C. (2010). Los tratados franceses en la enseñanza del análisis en Colombia (1851-1951). En: Matos, J. M. y Rodrigues Valente, W. (eds.) (2010). *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos. UIED,* Coleção Educação e Desenvolvimento. Lisboa. http://run.unl.pt/bitstream/10362/5321/1/Matos_2010.pdf

Baillaud, B. y Bourget, H. (ed.) (1905). *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. 2 vols., GauthiersVillars, Paris.

Bernays, P. (1935). *Hilbert's investigations of the foundations of arithmetic*. Bernays Proyect, text 114. Disponible en www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/bernays14_2003-05-08.pdf.

Bkouche, R. (1997). Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. *For the learning of mathematics,* vol. 17, No. 1. february, 1997.

Cassou-Noguès, P. (2001). *De la expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès.* Paris: Vrin.

Dedekind, R. (1998) *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza. Primera versión en alemán, 1888.

Desanti, J. (1968). *Les Idéalités Mathématiques.* Paris: Seuil.

Gardies, J. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique.* Paris: Vrin.

Giusti, E. (2000). *La naissance des objets Mathématiques.* Ellipses, Paris.

Hermite, Ch. (1984). Lettres à Gösta Mittag-Leffler, publiées et annotées par P. Dugac, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathematiques,* 5:49-285.

Klein, F. (1974). *Le programme d'Erlangen; considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes.* Préf. de Jean Dieudonné. Postface du P. François Russo. Gauthier-Villars, Paris.

Le Lionnais, F. (ed.) (1948). *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris, Cahiers du Sud.

Otte, M. (2007). Mathematical history, philosophy and education, *Educational Studies on Mathematics*, 66:243-255.

Panza, M. (2007). *Nombres: éléments de mathématiques pour philosophes.* Lyon: Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences. ENS Éditions.

Rivenc, F. et De Rouilhan, P. (ed.) (1992). *Logique et fondements des mathématiques*. *Anthologie* (1850-1914). Paris: Payot,.

Schwartz, L. (1997). *Un mathématicien aux prises avec le siècle.* Paris: Editions Odile Jacob.

Thurston, W. (1990). Mathematical education. *Notices of the American Mathematical Society*, 37, 844-850.

Capítulo 2

MEDIDA, NÚMERO Y MAGNITUD EN LA ANTIGÜEDAD GRIEGA

Luis Cornelio Recalde[1]

Introducción

La constitución objetiva del conjunto de los números reales sintetiza el desarrollo histórico de las actividades de medir, contar y ordenar. A su vez, con la integración de estas tres actividades se logra la constitución del continuo como objeto matemático. Medir, contar y ordenar son tres actividades que se desarrollan entrelazadas e interdependientes, de tal forma que si desaparece una de ellas, la interconexión de las otras dos carece de sentido.

Justamente los tres problemas primigenios, provenientes de la antigüedad griega, corresponden a problemas de medida:

1. La cuadratura del círculo.
2. La duplicación del cubo.
3. La trisección del ángulo.

Históricamente se pueden reconocer tres etapas en el desarrollo de la actividad de medir:

1. Etapa primaria.
2. Etapa relativa.
3. Etapa abstracta.

1 Profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle - Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle.

La *teoría primaria de la medida* proviene de la escuela pitagórica. Los pitagóricos sustentaban la idea de que para medir son suficientes los números de contar. Ello significaba que dadas dos magnitudes A y B de la misma naturaleza, se podían encontrar dos números n y m tales que,

$$nA = mB$$

"n copias de A" igual a "m copias de B".

La aparición de las magnitudes inconmensurables mostró lo erróneo de este planteamiento, puesto que si se toma el lado L de un cuadrado y su diagonal D se tiene que, para todo número n y m: $nL \neq mD$.

¿Cómo comparar, entonces, L y D?

Los *Elementos* de Euclides corresponden al primer compendio sistemático de una teoría de la medida. Es una *teoría relativa de la medida* en la cual, por un lado, se da una salida parcial al problema general de las cuadraturas, consistente en *construir con regla y compás un cuadrado equivalente a una figura plana* y, por otro lado, se establecen relaciones cuantitativas entre magnitudes a través de la *teoría de razones y proporciones*, planteada por Eudoxo.

Los planteamientos matemáticos de Euclides siguen los derroteros de la filosofía aristotélica en los siguientes aspectos:

1. No fija una definición formal de medida.
2. Establece una separación tajante entre los números y las magnitudes.
3. Sigue el principio de homogeneidad, según el cual, longitudes se miden con longitudes, áreas con áreas, ángulos con ángulos, etc.

La *teoría abstracta de la medida* tiene como soporte fundamental los números reales, los cuales constituyen una reglilla referencial que permite medir magnitudes. En particular, la medida de áreas (o de volúmenes) se define a través de una función, la cual le asigna a cada porción acotada de superficie un número real determinado. En términos simbólicos, se define una función:

$$f: \{\text{regiones planas acotadas}\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

cuyo dominio corresponde a las porciones de superficie, y su codominio son los reales positivos y el cero.

En este capítulo abordaremos la *teoría primaria de la medida* y la *teoría relativa de la medida*, dejando para un capítulo posterior el estudio de la *teoría abstracta de la medida*.

LA ETAPA PRIMARIA DE LA MEDIDA

La *teoría primaria de la medida* se desarrolla en la escuela pitagórica, entre los siglos VI y V a. C. En principio, para los pitagóricos, dadas dos magnitudes A y B, se podían encontrar dos números n y m tales que, $nA = mB$, es decir: "n copias de A" igual a "m copias de B".

En términos de comparación significa que A es a B como m es a n, que lo podemos escribir como

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

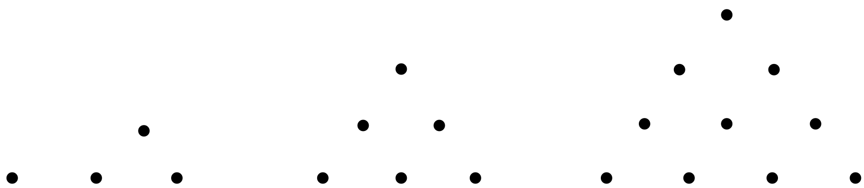
Sin embargo, debe quedar claro que en el contexto griego $\frac{m}{n}$ no es un número, ni menos $\frac{A}{B}$; aunque obviamente $\frac{m}{n}$ deja entrever a los números racionales, pero eso es algo que se fue dando en el transcurso de los siglos.

De lo anterior podemos deducir que desde la concepción pitagórica se establece la idea de que para medir basta con los números de contar.

LA TEORÍA PITAGÓRICA DE NÚMEROS

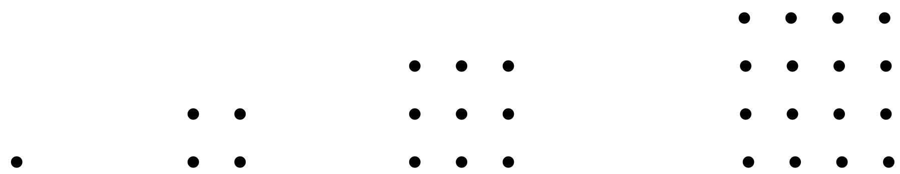
Los números jugaban un papel primario en la cosmovisión pitagórica. Los pitagóricos se regían bajo el principio que establece una interrelación indisoluble entre el número y la cosa: *los números eran cosas y las cosas eran números*.

Los pitagóricos desarrollaron una teoría compleja de números. En la demostración de las propiedades numéricas, los pitagóricos recurrían a las representaciones puntuales. De esta manera, 1, 3, 6 y 10 son **números triangulares**, puesto que corresponden a arreglos geométricos de este tipo:



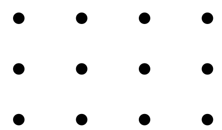
1 3 6 10

La sucesión 1, 4, 9, 16,. corresponde a **los números cuadrados**, puesto que el cuadrado correspondía a la forma de los arreglos de puntos:



1 4 9 16

Así mismo, un número como 12 pertenecía a la especie oblonga; es decir, tenía la siguiente forma:



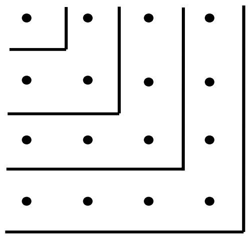
En términos más generales, un **número oblongo** es el número de puntos, en una ordenación rectangular, cuyo número de columnas es mayor en una unidad que el número de filas. Es decir, son de la forma $n(n + 1)$ donde n es el número de filas.

Uno de los aspectos que no debemos pasar por alto en la cosmovisión pitagórica y que posteriormente jugará un papel decisivo en la formación de pensamiento científico es la existencia de los contrarios. Aristóteles, en la *Metafísica*, presenta la tabla de los opuestos de la tradición pitagórica:

Macho	Hembra
Claro	Oscuro
Bueno	Malo
Impar	Par
Cuadrado	Rectangular

Lo interesante de la clasificación anterior es que las dos características no pueden coexistir; por ejemplo, no se puede ser macho y hembra a la vez. Corresponde a las primeras trazas del principio de no contradicción que constituye la base del método de reducción al absurdo, mediante el cual se demuestra la existencia de magnitudes inconmensurables. Para los pitagóricos el número tenía dos formas propias: lo impar y lo par. La duplicación o la división por dos eran las operaciones que definían la forma de los arreglos de puntos. Si un número determinado se puede separar en dos mitades, es un número par, en otro caso es impar. Si se le aplica un proceso de división sucesiva a un número par podía ocurrir que se obtuviera el 1 o que la operación de división ya no se pudiera efectuar, obteniéndose un número impar. Por ejemplo obtenemos 1 de la división de 4 y 8 en la segunda y tercera división sucesiva, respectivamente; 3 y 5 resultan directamente de la primera división por dos de 6 y 10.

Para entender un poco la profundidad conceptual en el planteamiento aritmético de los pitagóricos revisemos algunas manipulaciones numéricas a través de arreglos de puntos. La serie ascendente de los impares permitió a los pitagóricos obtener de otra forma los números cuadrados:



Que modernamente interpretamos de la siguiente manera:

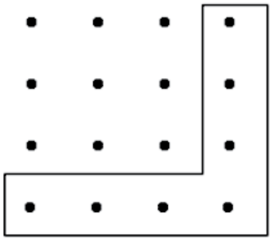
$$4 = 1+3$$
$$9 = 1+3+5$$
$$16 = 1+3+5+7$$
$$\vdots$$
$$n^2 = 1+3+5+7+9+ \cdot +(2n-1)$$

Ahora bien, si con base en las igualdades anteriores se establecen las diferencias:

$$4-1 = 3$$
$$9-4=9-(1+3) = 5$$
$$16-9 = 16-(1+3+5) = 7$$
$$25-16 = 25-(1+3+5+7) = 9$$
$$\vdots$$
$$n^2-(n-1)^2 = (2n-1)$$

Esto demuestra que todo impar es la diferencia de dos cuadrados sucesivos.

Interpretando este último resultado en términos de arreglos de puntos quedaría:

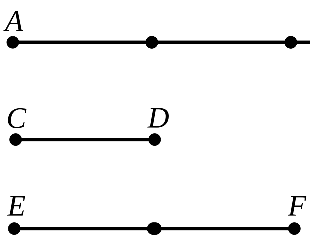


Notemos que la figura en forma de escuadra, denominada *gnomon*, determina la fórmula según la cual un número impar es la diferencia de dos pares. Una propiedad importante, la cual no es difícil establecer, es que cada *gnomon* es impar y todos los impares, excepto el uno, son *gnomon*.

A través de manipulaciones por medio del *gnomon*, los pitagóricos obtenían entonces las dos especies fundamentales de números en la oposición par-impar. Lo que debemos destacar en lo anterior es que el proceso mismo establece la imposibilidad de la convivencia simultánea de lo par e impar.

Las limitaciones de la primera teoría de la medida

La aparición de las magnitudes inconmensurables mostró la falsedad del planteamiento según el cual para medir son suficientes los números de contar. Para entender esta problemática es necesario comprender la dimensión filosófica de los pitagóricos. Tomemos, por ejemplo, tres segmentos *AB*, *CD* y *EF*.



Si comparamos *AB* con *CD*, vemos que tres veces *CD* es igual a *AB*; esto es: *AB* = 3*CD*. Si representamos, siguiendo la tradición pitagórica, la situación anterior, tomando por un punto la unidad *CD*, tenemos que:

$$\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{3\,veces\ CD} = \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{AB}$$

Si comparamos *AB* con *EF*, donde $EF = 2CD$, tenemos que no se puede conformar un arreglo de puntos tal que $nEF = AB$. Sin embargo, tres agrupaciones de *EF* corresponden a dos agrupaciones de *AB*.

$$\underbrace{\overbrace{\bullet\bullet}^{EF}\quad\overbrace{\bullet\bullet}^{EF}\quad\overbrace{\bullet\bullet}^{EF}}_{3\,\textit{veces EF}} = \underbrace{\overbrace{\bullet\quad\bullet\quad\bullet}^{AB}\quad\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{AB}}_{2\,\textit{veces AB}}$$

En este caso la relación entre *AB* y *EF* se puede establecer a través de números. Decimos que *AB* es a *EF*, como 2 es a 3.

En general, dos magnitudes *A* y *B* son conmensurables si existen dos números *n* y *m*, tales que $nA = mB$.

Los pitagóricos estaban convencidos de la universalidad de la conmensurabilidad. Sin embargo, en el mismo ambiente pitagórico se demostró lo contrario; es decir, que existen magnitudes *A* y *B* tales que, para todo número *n* y *m*:

$$n\mathrm{A} \neq m\mathrm{B}$$

Observemos que, implícitamente, nos enfrentamos a un proceso infinito de corroboración. La gran idea de los antiguos pitagóricos fue haber incorporado un proceso abstracto que mostraba esta imposibilidad. Se trata de una manera de probar enunciados, enmarcada en la cosmovisión de los antiguos griegos, que generalmente se identifica a través del *logos*: λόγων.

El *logos* es un concepto con múltiples acepciones que identificó el pensamiento griego. Algunos toman *logos* como sinónimo de racional. Aristóteles lo toma como razonamiento en los *Analíticos*; para Euclides corresponde a una relación cuantitativa entre magnitudes. Esta última acepción es la que nos interesa.

La emergencia de lo irracional correspondería al *alogos*: ἀλόγων. ¿Cómo se da el *alogos* en un ambiente que se movía bajo el imperio del *logos*? Esta es una cuestión que, desde nuestra perspectiva moderna, nos plantea el problema de indagar sobre las primeras huellas de lo irracional.

El problema de la irracionalidad puede ser tratado desde lo aritmético o desde lo geométrico; es decir, desde la relación *número-magnitud*. Estos son dos aspectos que han mantenido una tensión histórica que alcanzó su síntesis en la construcción de los irracionales por parte de Cantor y Dedekind hacia finales del siglo XX.

Es conveniente entender que el marco conceptual en el cual se desarrolla la matemática desde la antigüedad griega está cimentado en la necesidad de demostrar. En este sentido, partimos de la existencia de unos objetos abstractos regidos por principios lógicos establecidos a través del método *hipotético-deductivo*.

La legalización del método hipotético-deductivo se establece a través de una axiomática. Los axiomas son enunciados privilegiados que no necesitan demostración, ya sea por ser intuitivamente verdaderos o porque sencillamente se toman como puntos de partida. El primero en establecer un compendio sistemático de lógica fue Aristóteles. En los *Analíticos*, Aristóteles precisa que la matemática se debe regir por tres axiomas básicos: *El principio de identidad*, *el principio del tercero excluido* y *el principio de no contradicción*. El principio de identidad permite reemplazar cosas iguales en diversos contextos. El segundo principio establece que un enunciado sólo puede ser falso o verdadero. El tercer principio prohíbe la presencia de proposiciones que sean falsas y verdaderas a la vez. El método demostrativo por *reducción al absurdo* se basa en el tercer principio.

Contextos posibles de aparición del problema de la irracionalidad

En la emergencia de lo irracional se pueden identificar tres contextos:

El contexto musical

Los pitagóricos establecieron una teoría musical mediante las razones de números enteros, utilizando una especie de guitarra con una sola cuerda, llamada *monocordio*. Los pitagóricos observaron que las cuerdas que daban el tono, la cuarta, la quinta y la octava, tenían longitudes proporcionales a 12, 9, 8 y 6, o, lo que es lo mismo, tenían longitudes proporcionales a 1, 3/4, 2/3 y ½. Tomando una frecuencia base para una cuerda de 1, cuando se tiene una cuerda de longitud 2, se obtiene un sonido una octava más alta que la nota original. Si su longitud es 3/4 que la primera, la cuerda emite la cuarta de la nota base, y si su longitud es 2/3 de la inicial, la nota que suena es la quinta de la nota base. Todo funciona bien con números enteros hasta que hay necesidad de dividir la octava en dos, pues lleva al problema de encontrar un número cuyo cuadrado sea dos.

El problema de la diagonal del cuadrado

El cuadrado es el polígono regular más simple y por ello fue tomado como figura base en la teoría de la medida relativa. Para los antiguos, el problema del área consistía en convertir, con regla y compás, cualquier figura plana en un cuadrado. Sin embargo el cuadrado mismo guardaba sus secretos, pues al pretender establecer relaciones cuantitativas entre su lado y la diagonal, descubrieron que eran inconmensurables.

El problema de la diagonal del pentágono

El pentágono regular ocupaba un lugar privilegiado en la cosmovisión pitagórica y constituía el emblema de su hermandad. Debió causar honda crisis entre ellos que el fenómeno de la inconmensurabilidad se presentara en esta figura. Específicamente, demostraron que la diagonal y el lado de un pentágono regular son inconmensurables. Para ello se basaron en un procedimiento llamado *Antiphairesis,* el cual detallaremos luego.

El problema de raíz de dos

Como veremos más adelante, el problema de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto a uno de sus lados pasa por la imposibilidad de establecer la raíz cuadrada de dos como razón entre dos números enteros. Desde nuestra visión moderna significa que no existe un número racional $\frac{p}{q}$, tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, lo cual, en el ambiente pitagórico, se interpreta como la imposibilidad de encontrar números enteros positivos p y q tales que $p^2 = 2q^2$.

La demostración se hace por el método de reducción al absurdo. Supongamos que existen números enteros positivos p y q los cuales satisfacen la igualdad

$$p^2 = 2q^2 \qquad \text{(I)}$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

(i) p impar y q impar.
(ii) p impar y q par.
(iii) p par y q impar.
(iv) p par y q par.

Demostremos que no se puede dar (i): Si p es impar, entonces p^2 es también impar, pero por (I), p^2 es par; eso significaría que p^2 es par e impar, lo cual es una contradicción.

De igual manera se prueba que no se puede dar (ii).

Demostremos que no se puede dar (iii): Si p es par, es de la forma $p = 2t$, donde t es un entero positivo. Reemplazando en (I) se tendrá,

$$(2t)^2 = 2q^2$$
$$4t^2 = 2q^2$$
$$2t^2 = q^2$$

Lo cual significa que q^2 es par; pero como q es impar, entonces q^2 también es impar. De esta forma, q^2 sería par e impar a la vez, lo cual es una contradicción.

Demostremos que no se puede dar (iv): Si p es par, es decir de la forma $p = 2t_1$, donde t_1 es un entero positivo que es la mitad de p. Reemplazando en (I) se tendrá,

$$
\begin{aligned}
(2t_1)^2 &= 2q^2 \\
4t_1^2 &= 2q^2 \\
2t_1^2 &= q^2 \qquad\qquad \text{(II)}
\end{aligned}
$$

Como q también es par, entonces $q = 2t_2$, donde t_2 es un entero positivo que es la mitad de q. Reemplazando en (II) y simplificando se tendrá que $t_2^2 = 2t_1^2$. Lo cual reproduce la misma situación inicial y, de acuerdo con el proceso anterior, sólo queda la posibilidad de que t_1 y t_2 sean pares. Eso significa que existe t_3, entero positivo, tal que $t_2 = 2t_3$. De lo anterior se sigue que t_3 es la mitad de t_2 y, por ende, resulta de la división doble de p.

Podemos continuar indefinidamente el proceso anterior produciendo divisiones sucesivas tanto de p como de q. Sin embargo, esto no es posible pues dado que son números pares, en algún momento debemos llegar a la unidad o a un número impar.

Como no se da ninguno de los cuatro casos anteriores quiere decir que no existen p y q enteros positivos tales que $p^2 = 2q^2$.

La demostración anterior no significa que los pitagóricos hay3an demostrado que $\sqrt{2}$ es un número irracional. De hecho ni siquiera podemos afirmar que hayan demostrado que $\sqrt{2}$ no sea un número racional, pues el universo numérico de los antiguos se reducía a nuestros números naturales; lo que se ha demostrado es que $\sqrt{2}$ no se puede visualizar como razón entre naturales; es decir, que la razón "$\sqrt{2}$ es a 1" no es igual a la razón "m es a n", donde m y n son naturales. Sin embargo, en la razón entre números naturales se va delineando la conformación de los números racionales.

LA *ANTIPHAIRESIS*

Dados dos números m y n, con $m > n$, podemos encontrar todos los divisores (partes alícuotas) de m y todos los divisores de n, y determinar el mayor divisor común a los dos. Es lo que denominamos *MCD*. Para hallar el *MCD* recurrimos a divisiones sucesivas

$$
\begin{array}{l|l}
m & \underline{n} \\
r_1 & c_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
n & \underline{r_1} \\
r_2 & c_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
r_1 & \underline{r_2} \\
r_3 & c_3
\end{array}
\qquad \cdots \qquad
\begin{array}{l|l}
r_{n-2} & \underline{r_{n-1}} \\
r_n & c_n
\end{array}
\qquad \text{donde } r_n = 0, \text{ o } r_n = 1
$$

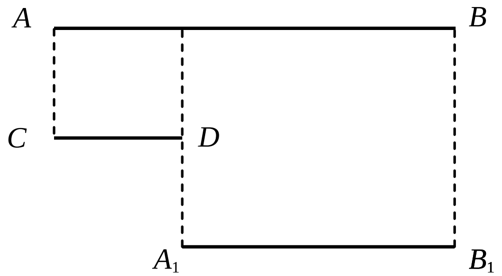
Se pueden presentar tres situaciones:

1. Si $r_1 = 0$, entonces el *MCD* de m y n es n.
2. Si $r_n = 1$, quiere decir que m y n no tienen divisores comunes; en este caso decimos que son primos relativos.
3. Si $r_n = 1$, $n > 1$, entonces el *MCD* de m y n es r_{n-1}.

Observemos que el proceso de dividir consiste en efectuar restas sucesivas de los números en consideración:

$$m - n \times c_1 = r_1$$
$$n - r_1 \times c_2 = r_2$$
$$r_1 - r_2 \times c_3 = r_3$$

Este proceso aplicado a las magnitudes es el que se conoce como *antiphairesis* y consiste en lo siguiente: Dadas dos magnitudes se trata de encontrar la magnitud más grande que los mida a los dos (la mayor parte alícuota). Para ello se recurre a sustracciones repetidas. Supongamos que tenemos los dos segmentos $AB > CD$.



Al sustraer CD de AB, obtenemos A_1B_1. Si $CD < A_1B_1$, se sustrae CD de A_1B_1, obteniendo A_2B_2. Se aplica el mismo proceso repetidamente. Cuando se llega a un segmento $A_kB_k < CD$, se cumple que:

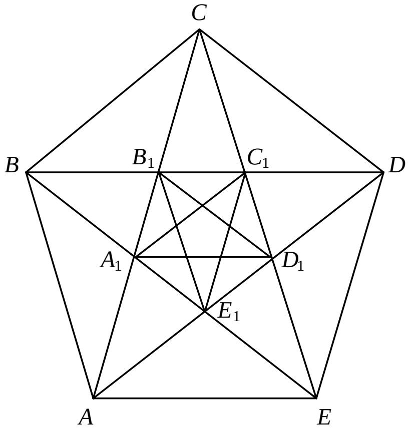
$$AB - k\, CD = A_kB_k$$

1. Si $A_kB_k = 0$, entonces CD es el mayor segmento que mide a AB y a CD.
2. Si $A_kB_k \neq 0$, se compara A_kB_k con CD y se procede a establecer en una segunda etapa el procedimiento anterior. Se pueden presentar dos casos:
   (i) A través de un número finito de etapas se llega a un segmento nulo. Los dos segmentos iguales de la etapa precedente son la parte alícuota común buscada y las magnitudes serán conmensurables.
   (ii) El proceso sigue infinitamente, y la longitud de los segmentos sucesivos tiende a cero. En este caso las magnitudes serán inconmensurables.

El procedimiento de la *anthyphérèse* está expuesto formalmente en el libro VII de los *Elementos* de Euclides para los números y en el libro X para las magnitudes en general.

El caso del pentágono

El carácter indefinido de la *anthyphérèse* aparece, de manera inmediata, cuando comparamos el lado y la diagonal de un pentágono regular.



Si tratamos de medir la diagonal AD con el lado BC tenemos:

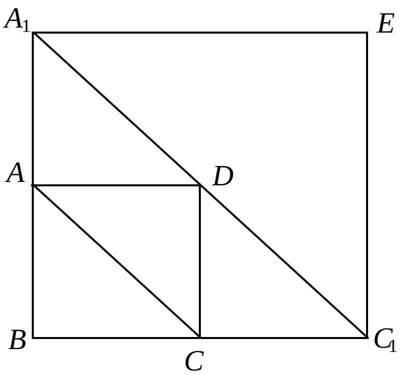
1. Dado que $ABCD_1$ es un paralelogramo, $BC = AD_1$, por tanto, BC cabe una vez en AD, sobrando D_1D.
2. Debemos comparar ahora el sobrante D_1D con el lado $BC = AD_1$.
3. Puesto que $AE_1 = D_1D$, entonces, D_1D cabe una vez en AD_1 y sobra E_1D_1.
4. Siguiendo el proceso de medición, debemos determinar las veces que E_1D_1 cabe en AE_1, lo cual es lo mismo que determinar las veces que E_1D_1 cabe en A_1C_1, ya que $A_1C_1D_1A$ es un paralelogramo; en otras palabras, medir la diagonal A_1C_1 del pentágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1$ con su lado E_1D_1, de tal suerte que llegamos al problema inicial de establecer la medida de una diagonal de un pentágono regular por su diagonal y el proceso sigue indefinidamente.

El caso del cuadrado

El caso de la inconmensurabilidad de la diagonal y del lado de un cuadrado es el que goza de mayor fama. Es un problema que tiene relación directa con la imposibilidad de expresar $\sqrt{2}$ como razón de números naturales; sin embargo, son dos problemas diferentes.

1. En el marco de la aritmética, se muestra que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como razón de dos números naturales.
2. En el marco de la geometría, se verifica que la diagonal del cuadrado no admite parte alícuota común con el lado.

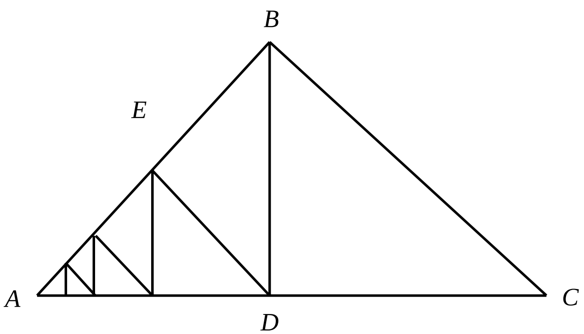
Aunque son dos asuntos históricamente subsidiarios, el problema aritmético es mucho más simple en su enunciado que el problema geométrico, pues expresa una propiedad del número 2, en cambio el problema geométrico no expresa una propiedad intrínseca de la diagonal del cuadrado, sino la relación cuantitativa entre la diagonal y el lado del cuadrado. Basta analizar la siguiente figura, en la cual tanto *ABCD* como A_1BC_1E son cuadrados.



En particular, A_1C_1 y *AC* se encuentran en relación de 2 a 1; pero ni A_1C_1 y *AB*, ni *AC* y *AB* se encuentran en una relación entre enteros.

Sigamos el proceso de verificación de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado tomando como referencia el triángulo rectángulo *ABC,* tal que *AB* = *BC*. Demostremos, usando reducción al absurdo, que *BC* es inconmensurable con *AC*. Supongamos lo contrario; esto es, que existe un segmento, el cual designaremos como *U*, tal que,

$$AB = BC = n\,U$$
$$AC = m\,U$$



Por el teorema de Pitágoras tenemos que:
Cuadrado de lado *AC* = Cuadrado de lado *AB* + Cuadrado de lado *BC*.

Como *AB* = *BC*, se tiene que:

Cuadrado de lado *AC* = 2 (Cuadrado de lado *AB*)
Cuadrado de lado *mU* = 2 (Cuadrado de lado *nU*)
m^2 (cuadrado de lado *U*) = 2 n^2 (cuadrado de lado *U*).

De la última igualdad se puede establecer la igualdad entre números:

$$m^2 = 2n^2 \text{ (III)}$$

m^2 par, implica que *m* es par, y como *AC* = *m U*, entonces la altura *BD* corta la hipotenusa *AC* en el punto medio, y el punto *D* corresponde al punto que une dos unidades, lo cual significa que $AD = \frac{m}{2}\ AC = K\ AC$. Reemplazando en (III) se tendrá que $(2k)^2 = 2n^2$. De lo cual se deduce que *n* es par, es decir $n = 2\ t$.

Sea *E* el punto medio del lado *AB*. Se traza la recta *EF*, paralela a *BD*, formándose el triángulo rectángulo *AED* de catetos *AE* y *ED*. Debido a la construcción se tiene que

$$AE = ED = \frac{n}{2} U = tU$$

Siguiendo el mismo proceso anterior se tendría que la hipotenusa *AD*, igual a la mitad del lado *AC* = *mU*, es igual a un número par de unidades *U*, y por lo tanto, la altura *EF* corta a *AD* en el punto medio; ello significa que *F* corresponde al punto de unión de dos unidades. Usando la misma construcción se puede seguir indefinidamente. De otro lado, como *m* tiene un número finito de unidades, después de un número finito de pasos se llegaría a la unidad o a un número impar, en contradicción con lo anterior.

Esta contradicción lleva a concluir que no puede existir una unidad común para *AB* y *AC*; es decir, que no son conmensurables.

Este hecho debe haber causado confusión entre los pitagóricos. Era prácticamente un atentado contra las bases fundamentales del razonamiento aceptadas y difundidas libremente y una negación de la armonía numérica de la naturaleza.

Las magnitudes inconmensurables constituyen el primer antecedente de los números irracionales. Tal vez el hecho de aparecer como entes “contradictorios” de los números “razonables”, es decir, aquellos que pueden expresarse por razones de números naturales, tuvo que ver con el nombre que adoptaron cuando históricamente se pasó del concepto de magnitud al concepto de número. En otras palabras, cuando se pasó del contexto geométrico al aritmético.

La etapa de la medida relativa

La etapa de la *medida relativa* fue sistematizada por Euclides en los *Elementos*. El apelativo de *medida relativa* se debe a la ausencia de una escala numérica referencial que permitiera asignar a cada magnitud un número correspondiente a su medida. Se trata fundamentalmente de una teoría de la medida que se establece a partir de razones y equivalencias. En el caso de las figuras planas, por ejemplo, consiste en *transformar las figuras en cuadrados*. Es lo que se conoce con el nombre de *cuadraturas*. Euclides resuelve este problema para figuras planas, cuyos bordes son líneas rectas y sienta algunas bases conceptuales para la solución del problema en general a partir de la teoría de razones y el método exhaustivo.

La teoría de la medida relativa de Euclides se basa en la noción de congruencia, en la relación de igualdad y en la suposición de que las magnitudes se rigen por una relación de orden.

1. La igualdad se refiere a la cantidad: cosas iguales son aquellas que tienen la misma cantidad.
2. La congruencia está ligada al principio de identidad, en el sentido que decimos el mismo ser. Como, por ejemplo, las líneas rectas iguales son idénticas (congruentes), también los cuadriláteros de lados iguales y ángulos iguales.
3. El orden en las magnitudes es un orden total; ello significa que dadas dos magnitudes, se cumple que son iguales o que una de ellas es mayor que la otra.

Este tratamiento trae algunas implicaciones que a veces tienden a confundir y que es preciso aclarar. Intuitivamente la noción de congruencia está ligada con la idea de “encajar” o “ajustar”. Dos cosas serían congruentes si la una “encaja” perfectamente sobre la otra. Pero no debemos confundirnos con la operación de “encajar”, pues si bien esta noción involucra, de alguna manera, procesos mecánicos muy alejados de los procedimientos matemáticos, en geometría el movimiento se hace a partir de un cuerpo teórico. Cuando hablamos de movimiento nos referimos a un tipo de movimiento respaldado por definiciones, axiomas y postulados.

La medida relativa en figuras planas

En los primeros libros de los *Elementos*, Euclides aborda el problema de la medida de figuras planas. Dado que Euclides no posee un sistema numérico referencial, ni una teoría de ecuaciones que le permita despejar y calcular el lado del cuadrado de una manera algorítmica, recurre a descomposiciones y transformaciones de la figura original, conformando piezas con las cuales construye un cuadrado. Es un proceso teórico de recortar y pegar piezas. Ello es posible porque las figuras no cambian de tamaño cuando se cambian de lugar, es decir, la geometría euclidiana es *rígida* o *invariante bajo translaciones*. Para ello hace uso de 23 definiciones, 9 nociones comunes y cinco postulados.

Algunas de las 23 definiciones presentadas por Euclides en el libro I de los *Elementos* son las siguientes:

- Un punto es lo que no tiene partes.
- Una línea es una longitud sin anchura.
- Los extremos de la línea son puntos.
- Línea recta es la que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.
- Los extremos de una superficie son líneas.
- Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
- Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
- Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
- Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.

La versión más conocida de los cinco postulados es la siguiente:

1. Por dos puntos pasa una recta y sólo una.
2. Una recta se puede prolongar indefinidamente.
3. Para trazar un círculo se necesita un centro y un radio.
4. Los ángulos rectos son iguales.
5. Por el punto exterior a una recta pasa una paralela y sólo una.

Las nociones comunes corresponden a la relación de orden y a igualdades.

- Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
- Si a cosas iguales se adicionan cosas iguales, se obtienen cosas iguales.
- Si de cosas iguales se restan cosas iguales, se obtiene cosas iguales.
- Las cosas congruentes entre sí, son iguales entre sí.
- El todo es mayor que la parte.

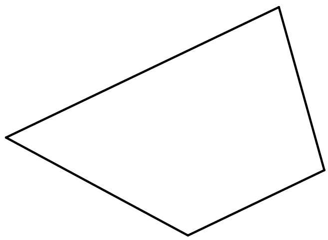
En los dos primeros libros de los *Elementos*, Euclides resuelve el problema de encontrar un cuadrado equivalente a una figura rectilínea cualquiera, usando regla y compás teóricos. A continuación se describe, en forma general, el proceso seguido por Euclides.

En las primeras 26 proposiciones Euclides establece condiciones para la igualdad y la traslación de triángulos.

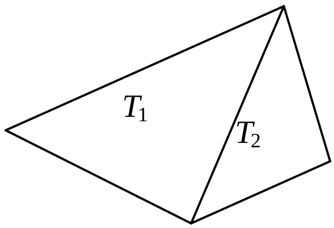
De la proposición 27 a la 43, Euclides establece propiedades de paralelismo que le permiten establecer equivalencias entre paralelogramos y triángulos.

En la proposición 44, Euclides construye un paralelogramo, del cual se conocen un lado y un ángulo, equivalente a un triángulo.

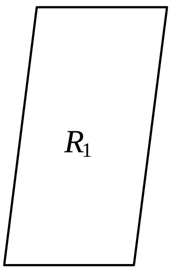
En la proposición 45, Euclides construye un paralelogramo (un rectángulo) igual a una figura rectilínea dada a través de los siguientes pasos: Dada la figura rectilínea,



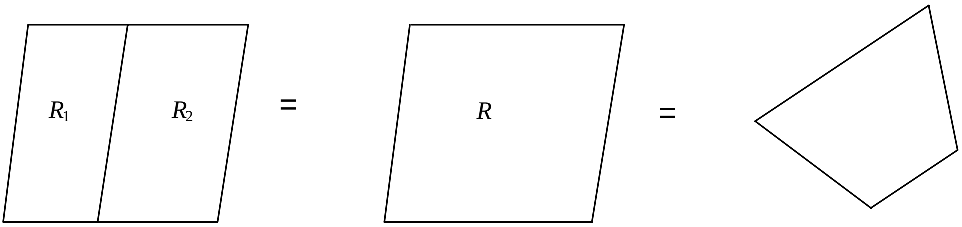
se divide en los triángulos T_1 y T_2, como se visualiza en la figura,



el triángulo T_1 se transforma en el paralelogramo R_1



El triángulo T_2 se transforma en el paralelogramo R_2, de modo conveniente, usando la proposición 44, de tal suerte que R_1 y R_2 formen el paralelogramo R, igual a la figura rectilínea inicial.

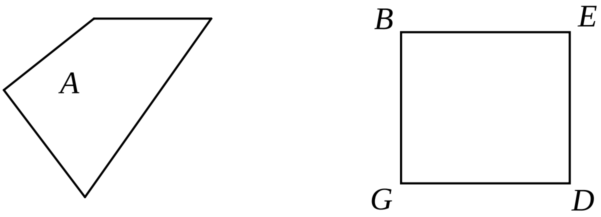


En la proposición I.47, Euclides demuestra el teorema de Pitágoras en la versión geométrica: *En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos por los catetos*.

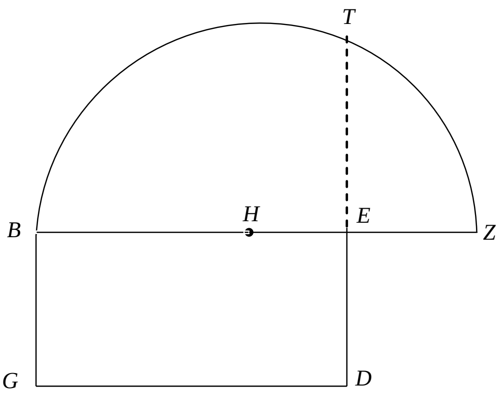
En la proposición II.14 utiliza el teorema de Pitágoras para resolver el problema de la cuadratura de figuras rectilíneas.

Proposición II.14: Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

La construcción se soporta sobre toda la maquinaria teórica del libro I, especialmente en la proposición I.45: Dada la región rectilínea *A*, utilizando la proposición I.45, se construye el rectángulo *BEDG* equivalente a esta región.



Si *BE* = *ED*, el rectángulo correspondería al cuadrado buscado; en caso contrario, significa que uno de los lados es el mayor. Suponiendo que sea *BE*, se realiza la construcción de la figura siguiente:



A continuación de *BE* se traza *EZ* y se localiza el punto medio de *BZ*, el cual se designa por la letra *H*. Con centro en *H* se traza una semicircunferencia. Desde *E* se traza una perpendicular que corta a la semicircunferencia en el punto *T*. Los triángulos *BTZ*, *BET* y *TEZ* son rectángulos. Como los triángulos *BET* y *TEZ* son semejantes, se puede establecer la proporción:

$$\frac{BE}{ET} = \frac{ET}{EZ}$$

En la proposición VII.16 de los *Elementos*, Euclides demuestra que si cuatro segmentos están en proporción, entonces el rectángulo formado por los medios es igual al rectángulo formado por los extremos; es decir, el rectángulo de lados *BE* y *ED* = *EZ* es igual al cuadrado de lado *ET*. Observemos que no hemos utilizado la propiedad moderna de las proporciones, según la cual producto de medios es igual a producto de extremos.

La teoría de razones y proporciones en Euclides

Como hemos dicho antes, históricamente se reconoce los *Elementos* de Euclides como uno de los libros de mayor importancia para las matemáticas, en el cual se sintetiza gran parte de los adelantos griegos en torno al número y a la magnitud, en torno a lo discreto y a lo continuo. La separación de las dos teorías se debe fundamentalmente a la naturaleza de los conceptos de número y magnitud. La magnitud es infinitamente divisible, el número es divisible un número finito de veces; el número es discreto, la magnitud es continua. Euclides comprende que la teoría de proporciones es la salida conceptual a la cuestión de establecer relaciones cuantitativas, en términos generales, dadas las limitaciones del método de las cuadraturas que desarrollamos antes y de la emergencia de las magnitudes inconmensurables.

El objetivo central perseguido por Euclides, en el libro V de los *Elementos*, era el de establecer relaciones de cantidad entre magnitudes. Para ello, Euclides parte del presupuesto de que las magnitudes se pueden sumar, restar y comparar. Las operaciones siguen los delineamientos de homogeneidad y se definen entre magnitudes de la misma naturaleza. Sin embargo es posible comparar relaciones cuantitativas entre magnitudes de diversa naturaleza. En nuestro caso, a pesar de que los enunciados se hacen sobre magnitudes en general, se trabaja con segmentos, en los cuales no existen problemas con las operaciones indicadas. Los conceptos básicos empleados por Euclides para comparar las magnitudes son proporción y razón. Analicemos algunos resultados del libro V.

> **Definición V.1:** Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.

Euclides no aclara cómo medir las magnitudes. Se supone que se siguen los pasos del proceso de la *antiphairesis* que hemos presentado antes. Es decir, el segmento A mide al segmento B, cuando existe un número natural n, tal que $B = nA$, donde nA tiene la connotación vista antes en el sentido de "n copias del segmento A". En este caso se dice que el segmento B es múltiplo del segmento A, como se establece en la segunda definición:

> **Definición V.2:** Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.

Dados dos segmentos A y B, a los cuales les aplicamos el proceso de *antiphairesis*, también puede suceder que aunque ninguno de ellos sea parte del otro, existan números naturales m y n tales que $nA = mB$. Euclides no repara en ello y desarrolla la teoría de razones y proporciones, aplazando esta cuestión para el libro X, después de haber desarrollado la teoría de números.

> **Definición V.3:** Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.

A través del concepto de razón Euclides establece una relación de cantidad que abarca las magnitudes inconmensurables. La "razón" establece una operación abstracta y constituye una metáfora de la comparación cuantitativa de dos magnitudes. La simbolización $a : b$ es un paso adelante, que prefigura nuestro cociente $a \div b$ o $\frac{a}{b}$ el cual posee un status ontológico diferente a las "razones". Más concretamente, la "razón" es un proceso de comparación entre magnitudes (segmentos, por ejemplo); pero no se constituye en sí misma como algo acabado. En contraste con esto, a pesar de que consideramos la división como un proceso, sabemos que el cociente $\frac{a}{b}$ es a su vez un número. Gramaticalmente, la "razón" es sólo un verbo, mientras el cociente es un sustantivo.

> **Definición V.4:** Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.

Esta definición es muy importante, pues se basa en la propiedad arquimediana, según la cual, si A y B son dos segmentos, entonces siempre existe un entero n tal que $nA > B$.

Esta propiedad, como sabemos, significa que todos los segmentos son de un orden de magnitud comparable, es decir, que no existe ni un segmento infinitamente pequeño ni uno infinitamente grande, ni tampoco un segmento de cantidad cero. Además garantiza que si tomamos un segmento A podemos prolongarlo, tomando copias de él mismo, hasta obtener otro segmento tan grande como se quiera.

Definición V.5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y de la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

Es la definición esencial del libro V, porque iguala relaciones cuantitativas de una manera operativa.

Varios aspectos se desprenden de esta definición. En primer lugar parece indicar la existencia de un universo de segmentos el cual se va generando por adiciones sucesivas. En este universo se ha definido una relación de orden total. Eso significa que en este universo se cumple la tricotomía; esto es, dadas dos magnitudes E y F, se da uno solo de los siguientes casos:

1. $E = F$
2. $E < F$
3. $E > F$

La anterior aclaración nos permite visualizar en términos modernos la definición V.5 de la siguiente manera: Sean 4 segmentos A, B, C y D; se dice que A y B están en la misma razón que C y D, simbólicamente $A : B = C : D$, cuando para todo entero n y m se tienen las implicaciones siguientes, según los tres únicos casos posibles:

1. Si $nA = mB$ entonces, $nC = mD$

2. Si $nA > mB$ entonces, $nC > mD$

3. Si $nA < mB$ entonces, $nC < mD$

Si ahora interpretamos lo anterior en términos modernos, vemos que la variación de m y n en los naturales, nos produce el universo de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$, de tal forma que podemos escribir las condiciones anteriores como:

1. Si $A = \frac{m}{n}B$ entonces, $C = \frac{m}{n}D$

2. Si $A > \frac{m}{n}B$ entonces, $C > \frac{m}{n}D$

3. Si $A < \frac{m}{n}B$ entonces, $C < \frac{m}{n}D$

Observemos que con estas condiciones, si tomamos como referencia la razón $A : B$, que simbolizamos por α, el universo de los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ quedará fragmentado en dos o tres clases, dependiendo de si A y B son conmensurables o no. Esta fragmentación de $\mathbb{Q}^+$ es lo que se denomina una cortadura de $\mathbb{Q}^+$. Si A y B son conmensurables se formará la clase I de racionales que producen el numeral 1 (en realidad esta clase está formada por un solo elemento). La clase II de los racionales positivos que producen el numeral 2 y la clase III de los racionales positivos que producen el numeral 3. Si las magnitudes son inconmensurables tenemos que el conjunto de los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ quedará fragmentado sólo en las clases II y III.

Observemos que existen cortaduras de $\mathbb{Q}^+$ que son producidas por magnitudes conmensurables y cortaduras que son producidas por magnitudes inconmensurables. Sólo hasta el siglo XIX, el matemático alemán Richard Dedekind establece la construcción de los números reales a través de la noción de cortadura.

En la definición siguiente, Euclides introduce la noción de proporción.

> **Definición V.6:** Llámese proporcionales a las magnitudes que guardan la misma razón.

Después de presentar 12 definiciones, Euclides demuestra 25 teoremas sobre magnitudes y razones entre magnitudes.

Históricamente, el libro V representa una salida conceptual al problema de la relación cuantitativa utilizando sólo el referente numérico de los enteros positivos. Como sabemos, los antiguos griegos no manejaban el concepto de número racional en general, ni mucho menos el concepto de número irracional. Eso se presenta como una limitación en los primeros libros, pues se carece de un sistema de referencia al cual amarrar una teoría de la medida. En el libro V, justamente a partir de la teoría de proporciones, Euclides logra colmar de alguna forma esa carencia.

La teoría de números en Euclides

El universo numérico formalizado por Euclides corresponde a nuestros números naturales excepto el uno. En este universo se supone que la suma se efectúa de la manera típica mediante la adición de unidades a uno de los sumandos hasta agotar el otro y efectuando la operación de contar. A diferencia con las magnitudes, Euclides define el producto entre números a partir de la suma. Euclides desarrolla la teoría de números en los libros VII, VIII y IX de los *Elementos*; en ellos estudia lo que modernamente tiene que ver con propiedades de las operaciones y razones.

El libro VII consta de 22 definiciones, seguidas de 32 proposiciones, cuyas demostraciones no se apoyan en argumentaciones geométricas; las pruebas son de corte retórico, fundamentalmente debido a la ausencia de una representación simbólica apropiada.

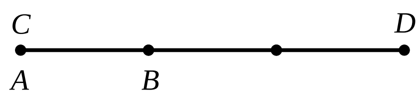
Dos de las definiciones que más han sido discutidas y que aquí nos interesan de manera especial son las de número y unidad, que establece Euclides en el libro VII.

> **Definición VII.1:** Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada uno.
>
> **Definición VII.2:** Un número es una pluralidad compuesta de unidades.

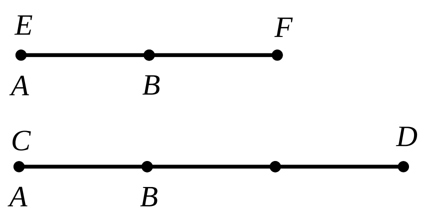
De estas dos definiciones se puede inferir que para Euclides, la unidad no es un número. La unidad es el principio del número y no puede gozar del mismo estatuto ontológico, puesto que la pluralidad (el número) debe ser algo opuesto a la singularidad que es la esencia de la unidad.

La primera definición implica el carácter indivisible de la unidad. Ella —la unidad— se toma como un todo, en el sentido de existencia.
De acuerdo con lo dicho antes, la unidad precede al número, pues éste se forma a partir de ella. El número se define con base en una unidad previamente establecida e indivisible. De esta manera, el proceso de representación numérico exige, en primera instancia, precisar la unidad. La representación de la unidad por la figura *AB* siguiente no implica que se pueda tomar como un segmento divisible, sino que debe tomarse de manera sintética, como un "todo".

De esta manera el numeral 3, que corresponde al número tres, en Euclides aparecería como la agrupación de tres unidades:

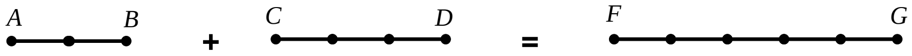


CD se forma por la disposición de las tres unidades, una a continuación de la otra, que nos indica el atributo discreto del número. Eso significa, por ejemplo, que entre los números representados por *EF* y *CD*, en la figura siguiente, no existe ningún otro número, debido a la manera como se va adicionando la unidad.



Observemos que el sentido euclidiano de pluralidad es diferente a la idea de conjunto o agrupación en sentido moderno. La pluralidad consiste en ir "pegando" la unidad y tomar luego como un todo el resultado. A su vez, el número visto como un todo, se puede disgregar en "paquetes" o "cuantos" que comprenden las unidades.

La representación del número permite incorporar algoritmos para la suma y la resta. Es el proceso de sumar consistente en "adicionar" a la primera pluralidad la segunda, como se visualiza en la figura siguiente:



FG representa la suma de *AB* y *CD*, que en la actualidad representamos como 2 + 3 = 5. Veamos cómo incorpora Euclides las nociones de divisor y múltiplo en el libro VII (Euclides, 1991, p. 113):

> **Definición VII.3:** Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.
>
> **Definición VII.4:** Pero partes cuando no lo mide.
>
> **Definición VII.5:** Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor.

Con las definiciones 3 y 5, Euclides incorpora las nociones de divisor y múltiplo. Son dos definiciones similares a las definiciones V.1 y V.2, con la diferencia de que en lugar de magnitudes μεγεθοζ aparece el número αξιθμοζ.

Se supone que dados dos números *m* y *n* con *m* > *n*, el número *n* divide al número *m*, cuando después de un número finito de sustracciones repetidas, empezando con *m–n* se obtiene cero, en un proceso que corresponde a la *aphairesis* aplicada a los números. Por ejemplo, 4 divide a 12 puesto que:

$$12 - 4 = 8$$

$$8 - 4 = 4$$

$$4 - 4 = 0$$

En cambio 4 no divide a 14, puesto que:

$$14 - 4 =10$$

$$10 - 4 = 6$$

$$6 - 4 = 2$$

En este caso 4 es una fracción de 14.

En las definiciones VII.6 y VII.7 Euclides define, respectivamente, número par e impar.

Las definiciones VII.8, VII.9, VII.10 y VII.11 caracterizan propiedades de algunos números, mientras que en la definición VII.12, Euclides incorpora la noción de número primo.

> **Definición VII.12:** Un número primo es el medido por la sola unidad.

De las definiciones anteriores se deduce que no tiene sentido dividir un número por sí mismo. La acción de dividir sigue la etimología de la palabra como tal y, en este sentido, para que un número divida a otro, debe ser estrictamente menor.

> **Definición VII.13:** Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común.

Se refiere a nuestros primos relativos.

> **Definición VII.14:** Número compuesto es el medido por algún número.

> **Definición VII.15:** Números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común.

Para estos números se puede hablar del máximo común divisor *MCD*, en contraposición a los primos relativos, esto es, aquellos que no tienen divisores comunes diferentes a la unidad.

En contraste con las magnitudes, en los números tiene sentido el producto, tal como lo define Euclides.

> **Definición VII.16:** Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número.

Corresponde al algoritmo fundamental y clásico de producto entre naturales a través de la suma.

En la definición VII.21 Euclides incorpora la noción de proporción:

> **Definición VII.21:** Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.

De manera más precisa, podemos enunciar esta definición de la siguiente manera:

> **Definición VII.21 (alterna)[2]:** *Dos razones $a : b$ y $c : d$, están en proporción $a : b = c : d$, si existen números p, q, m y n tales que $a = mp$, $b = mq$; $c = np$, $d = nq$.*

En términos modernos la definición hace alusión al hecho de que cualquier fracción se puede simplificar al máximo, de tal suerte que el numerador y el denominador sean primos relativos. Obsérvese que si $a = mp$, $b = mq$; $c = np$, $d = nq$, modernamente se puede escribir que:

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = \frac{c}{d}, \textit{ donde } p \textit{ y } q \textit{ son primos relativos}$$

Es decir, $\frac{p}{q}$ corresponde a una fracción simplificada.

El producto entre números permite establecer la noción de proporción en términos de la igualdad del producto de extremos y de medios, tal como se demuestra en la proposición VII.19.

> **Proposición VII.19:** Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y del cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales.

Las proposiciones VII.31 y IX.14 tienen relación con el teorema fundamental de la aritmética.

> **Proposición VII.31:** Todo número compuesto es medido por algún número primo.

En esta demostración usa el hecho de que cualquier conjunto de números enteros positivos tiene un mínimo.

> **Proposición IX.14:** Si un número es el menor medido por números primos, no será medido por ningún otro número primo fuera de los que le medían desde un principio.

La proposición 20 del libro IX, nos muestra el uso del infinito. Es interesante precisar que Euclides no demuestra que el conjunto de los números primos sea infinito, él demuestra que son infinitos en sentido potencial, es decir, que dada una colección de primos, siempre es posible encontrar otro por fuera de ellos. La demostración utiliza de manera delicada todas las herramientas conceptuales anteriores.

2 Versión del autor.

Proposición IX.20: Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.

La irracionalidad en Euclides

Si bien Euclides no establece para los números un cuerpo axiomático explícito, como lo hace para la geometría plana, incluye un grupo de definiciones que permiten visualizar algunas huellas de lo que veinte siglos después servirá de base para la instauración de un cuerpo teórico de los naturales tipo axiomas de Peano. A pesar de que no implanta axiomas de formación numérica, la definición de número como pluralidad de unidades deja traslucir un método de generación a través de la acción de ir aumentando unidades. La característica misma del número, como pluralidad de unidades, excluye el cero y la unidad; pero si establecemos el uno como punto de partida podemos visualizar un proceso inductivo de conformación de un conjunto infinito.

Es importante advertir que entre los números no tiene sentido hablar de inconmensurabilidad, pues el *uno* constituye la unidad común para todos. Eso no ocurre en el universo de los segmentos, pues no podemos hablar de un segmento unidad generador, dado que la continuidad del segmento, hace que pueda dividirse en segmentos cada vez menores. Por esa razón, Euclides se ve obligado a establecer una teoría de razones y proporciones para números y otra para magnitudes. Pero al fin y al cabo se trata del mismo concepto. La razón corresponde a una relación de cantidades, y son cantidades tanto las magnitudes como los números. La diferencia fundamental la establece el producto. Mientras en los números se define esta operación, en los segmentos parece no tener sentido. ¿Qué significa multiplicar el segmento A por el segmento B? Precisamente el acercamiento entre números y magnitudes pasa el establecimiento de esta operación en los segmentos. Se trata de que los segmentos se operen como los números. Una definición al respecto la encontramos, después de más de quince siglos, en la *Geometría* de Descartes. Sin embargo, el mismo Descartes encontró en Euclides la clave para sus definiciones.

Los ingredientes primigenios que permitieron incorporar la operación producto para las magnitudes se pueden vislumbrar en las proposiciones VI.12, VI.16 y VII.19.

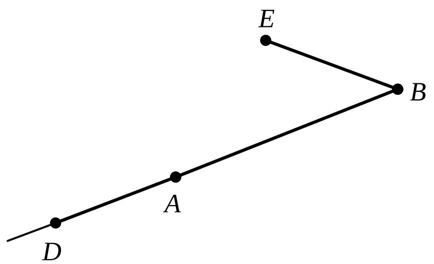
En la proposición VI.12 resuelve el problema de hallar la cuarta proporcional; esto es, dados los segmentos A, B y C, encontrar un segmento D, tales que la razón entre A y B sea igual a la razón entre C y D, simbólicamente: $A : B = C : D$.

En la proposición VI.16 establece que si $A : B = C : D$, donde A, B, C y D son segmentos, entonces el rectángulo que tiene por lados A y D es igual al rectángulo que tiene como lados B y C.

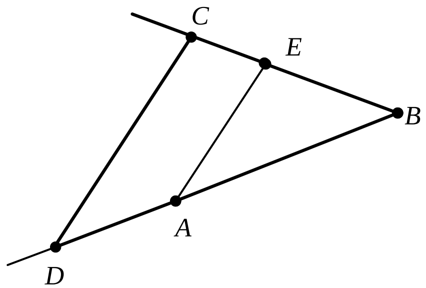
En la proposición VII.19, Euclides establece el clásico resultado según el cual cuatro números están en proporción si el producto de medios es igual al producto de extremos, esto es: $m : n = s : t$, si $m.t = n.s$.

Observemos que la proposición VII.19 tiene sentido porque se tiene la definición de producto entre números, la cual se funda en la suma. Pero la definición de la operación suma no basta para incorporar el producto entre segmentos copiando la idea del producto entre números como suma de un número de veces el otro. El problema, como lo visualizaran los matemáticos de los siglos XVI y XVII, radica en la diferencia entre el uno y la unidad. De esta manera, si dados tres segmentos y uno de ellos lo tomamos como *uno-unidad* en el sentido de que se comporte como neutro del producto, la combinación entre la cuarta proporcional, aplicada a segmentos, en combinación con la proposición VII.19 permite establecer el producto de segmentos como otro segmento, de la siguiente manera:

Supongamos que se requiere calcular el producto de dos segmentos *BE* y *AD*. Sea *AB* igual al segmento unidad. Se localizan los segmentos *BE*, *AD* y *AB* en la siguiente configuración:



Se traza *AE* y se prolonga *EB*, trazando *DC* paralela a *AE*:



Por semejanza de triángulos se tiene la proporción,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC}$$

Por lo tanto, si adoptamos la proposición VII.9 para segmentos tendremos que el producto de medios es igual al producto de extremos: *AB. BC* = *BE. BD*. Como la unidad *AB* cumple la propiedad de neutro multiplicativo, entonces *BC* es el producto de *BD* y *BE*.

La operatividad entre segmentos empieza a tener un comportamiento similar a la operatividad entre números.

Si aceptamos la multiplicación entre segmentos, tendremos que la proposición VI.16 servirá de base para establecer la medida del rectángulo en términos de longitudes. De esta manera se va abriendo paso el cálculo del área de un rectángulo como base por altura.

Sin embargo, más allá de estos aspectos que sólo aparecen de manera implícita en los *Elementos*, Euclides establece un puente de contacto entre número y magnitud en el libro X de los *Elementos,* en el cual formaliza las nociones de magnitudes conmensurables e inconmensurables.

> **Definición X.1:** Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma media, e inconmensurables aquellas que no es posible que haya una medida común.

Si planteamos el segmento inicial como una unidad base, observamos que Euclides está estableciendo la posibilidad de referenciar el universo de las magnitudes, entendiendo que ese universo se compone de dos conjuntos disjuntos: los conmensurables y los inconmensurables.

> **Definición X.2:** La líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común.

> **Definición X.3**: Dados estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas respectivamente conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud y otras también en cuadrado con una recta determinada.

En la proposición X.1, establece la imposibilidad de tener un segmento unidad generador, menor que cualquier otro segmento, que posea las características del *uno* en los números.

> **Proposición X.1:** Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

En la proposición X.2 formaliza el proceso de *antiphairesis* planteado al inicio, mediante el cual se demuestra la inconmensurabilidad de magnitudes.

> **Proposición X.2:** Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

En la proposición X.5 establece lo que podríamos denominar el primer acercamiento formal entre número y magnitud.

> **Proposición X.5:** Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Para la demostración identifica los dos procesos de medir que antes había especificado para magnitudes y para números. Sin embargo, el proceso de formalización de estos dos universos de cantidades duró más de veinticinco siglos y constituye lo que históricamente se conoce como la constitución del continuo como objeto matemático.

Bibliografía

Bernabé, A. (1996). *Filósofos presocráticos.* Barcelona: Atalaya.

Aristóteles (1994, 1967). *Metafísica.* Madrid: Gredos.

Aristóteles (1977). *Obras completas.* Madrid: Aguilar.

Aristóteles (1995). *Física.* Madrid: Gredos.

Betancourt, W. C. (1992). *Del logos al eidos.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Caveing, M. (1998). *Irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à euclide.* Paris: Universitaires du septentrion.

Cherniss, H. (1991). *La crítica aristotélica a la filosofía presocrática. Espacio, movimiento, peso y tiempo.* México: UNAM.

Dedekind, R. (1998) *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza.

Dhombres, J. N. (1980). *Mesure et continu épistémologie et histoire.* Paris: CEDIC/ Fernand Nathan.

Euclides (1991). *Elementos.* Madrid: Editorial Gredos.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of the Elements.* New York: Dover publications.

Morey, M. (1984). *Los presocráticos. Del mito al logos.* Barcelona: Montesinos.

Serres, M. (1991). *Historia de la ciencia.* Madrid: Ediciones Cátedra.

Serres, M. (1996). *Los orígenes de la geometría.* México, D.F.: Siglo Veintiuno.

Capítulo 3

TEORÍA DE ECUACIONES Y CONCEPTO DE NÚMERO. LOS CASOS DEL ÁLGEBRA ÁRABE Y DEL RENACIMIENTO

Ligia Amparo Torres R.[1]

Introducción

En este capítulo se abordan problemáticas relacionadas con procesos de objetivación de lo numérico desde la explicitud que la teoría de ecuaciones, en dos momentos fundamentales de su constitución, deja apreciar. Un momento relativo al **álgebra árabe**, abordada desde el trabajo matemático de al-Khwarizmi, en la cual aparece por primera vez el nombre *álgebra* con el que se caracteriza un campo disciplinar en las matemáticas, así como desde el inicio de una teoría de ecuaciones, en cuyo ámbito el número y la magnitud tienen una manera particular de tratamiento que si bien recoge aspectos importantes de la tradición griega, delimita esta significación a la apertura de un nuevo campo de producción de conocimiento. Y un momento relativo al **álgebra renacentista** que se presenta a través del trabajo de Cardano, en la solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. De este trabajo se analiza el tratamiento que Cardano debe dar a la solución de ecuaciones ante la no aceptación de los números negativos, lo que demanda un trabajo arduo para incorporar una teoría general de ecuaciones, donde la preocupación no radica exclusivamente en el método de solución —ligado al problema de lo numérico— sino a la inquietud explícita sobre la naturaleza de las raíces de las ecuaciones y el grado de éstas, lo cual implica un tratamiento particular de lo numérico.

[1] Profesora del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle - Miembro del Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

Este estudio histórico-epistemológico se enmarca en la problemática general en historia de las matemáticas que tiene que ver con el tipo de realidad y existencia de la que gozan los entes y relaciones matemáticas dentro de la teoría matemática, por ello es importante reflexionar sobre la manera como se han establecido los objetos algebraicos de la teoría de ecuaciones y cómo ese proceso no es constituible por fuera de un análisis de lo numérico. Lo anterior significa que aquí la mirada no se centra en la objetivación de los reales en sí misma, sino en procesos de objetivación de entes algebraicos donde existen nexos inexorables con la constitución del concepto de número.

Estos aspectos histórico-epistemológicos se tratan desde una perspectiva fenomenológica que alude a la naturaleza misma de las matemáticas y al proceso de producción de conceptos y conocimiento matemático, lo que significa que el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización de fenómenos está acompañado de un proceso por el cual los medios de organización se convierten en objetos que se sitúan en un campo de fenómenos. En consecuencia, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos-medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, y este proceso se reitera una y otra vez[2]. En el caso histórico se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto de ecuación y cómo se extendió a otros fenómenos.

Sin embargo, en este marco, surgen preguntas como: ¿Qué tipo de relación se establece entre estas problemáticas algebraicas y la constitución de los números reales? Intentar responder esta pregunta lleva a dos campos

2 En (Puig, 1998) se aclara: “Las matemáticas están, por tanto, en el mismo mundo de los fenómenos que organizan: no hay dos mundos sino uno que crece con cada producto de la actividad matemática. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la propia actividad matemática. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos de ese mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades de esas acciones, en tanto se encuentran en el primer término de un par fenómenos / medios de organización. La progresión escalonada de pares fenómenos / medios de organización comporta dos procesos: el proceso de creación de conceptos matemáticos como medios de organización, que viene indicado por cada par, y el proceso por el cual se objetiva un medio de organización de forma que puede entrar a formar parte de un nuevo par, ahora en la posición de los fenómenos. La progresión escalonada dibuja una imagen de la producción de objetos matemáticos cada vez de nivel más elevado, más abstractos, y muestra que la actividad matemática genera su propio contenido. He dicho que en el proceso de creación de conceptos matemáticos lo que se crea no son objetos ideales que se sitúan en un mundo ajeno a nuestra experiencia. Desde mi punto de vista esto es así fundamentalmente por el papel que desempeñan los sistemas de signos en que se expresan, se representan o se escriben las matemáticas en la práctica matemática.”

específicos, el histórico-epistemológico y el didáctico. Desde el primero, se puede afirmar que solución de ecuaciones y el número han estado ligados desde el comienzo mismo de la aparición de las ecuaciones y que la determinación de esta dialéctica se procura de diferentes maneras en la historia de las matemáticas, por ejemplo: problemas aritméticos y geométricos dan origen a problemas algebraicos, la interrelación de estos contextos marcó todo el desarrollo, no sólo de la teoría de ecuaciones, sino de las matemáticas mismas (Apolonio, al-Khwarizmi, Cardano, Chuquet, Vieta, Descartes); los sistemas numéricos han condicionado la posibilidad de modelar y resolver ecuaciones (egipcios); la solución de ecuaciones, desde un punto de vista analítico, tensiona los métodos de aproximaciones de raíces y, de forma específica, los métodos numéricos de aproximación y solución contribuyen a la etapa de aritmetización de las matemáticas (Cardano, Bombelli, Descartes, Wallis, Girard); la introducción de coeficientes literales abre la posibilidad de representaciones generales de lo numérico (Vieta, Descartes); y, el análisis de las raíces de ecuaciones y la teoría de números involucrados en la construcción de la Teoría de grupos permiten el salto al álgebra moderna (Gauss, Abel, Ruffini, Galois).

Desde la perspectiva didáctica, tenemos presente que lo que nos interesa es examinar las producciones matemáticas, sus conceptos y sus estructuras, en la medida en que hay personas que quieren aprenderlas y hay un sistema (el sistema escolar) que quiere enseñar contenidos social y culturalmente establecidos. Por ello, debemos tener presentes, por un lado, los conocimientos que los alumnos elaboran y, por otro, los conocimientos que son socialmente establecidos a los que el alumno debería acceder. Esta contraposición examinada en el sistema educativo —y específicamente en el campo curricular— nos muestra que el significado de los números reales como raíces de ecuaciones no es abordado en la escuela, como tampoco lo es un tratamiento donde se aproximen raíces de una ecuación (por ejemplo cúbica, como lo hace Cardano), puesto que la aproximación de raíces, por métodos numéricos, muestra adicionalmente una suposición de fondo, la cual se basa en una intuición del comportamiento de la función (asociada con la ecuación) y es precisamente su continuidad[3]. Lo anterior quiere decir que las interrelaciones epistemológicas del campo numérico y algebraico se obvian, en tanto se trabajan de manera independiente problemas del campo del álgebra, la aritmética y el cálculo, sin considerar que unos y otros se significan, para una construcción escolar de lo numérico y algebraico.

3 Valor negativo para $x = 1$, valor positivo para $x = 2$ implica valor 0 para algún x entre 1 y 2. Lo que vemos es un uso implícito de lo que hoy se conoce como el teorema de Bolzano, que se apoya aparentemente en una intuición del continuo numérico.

Esta aproximación no evade problemas fundamentales de la constitución de $\mathbb{R}$, como: la continuidad y la completitud, los reales como sucesiones de Cauchy, o los reales como cortaduras, etc. Lo que pone de manifiesto este capítulo es un significado de lo numérico, asociado a la solución de raíces y que se espera permita problematizar la construcción por extensión de los campos numéricos, que hace la escuela, pues pone de manifiesto la complejidad misma que tiene este tipo de construcción. Por lo tanto, el eje de este capítulo es la naturaleza de las raíces de las ecuaciones que se plantean, delimitada por los métodos de solución, el campo numérico en el cual se desarrollan y la relación número y magnitud en dos momentos fundamentales de la historia del álgebra. Este tratamiento se diferencia de lo tratado en el capítulo anterior, de este texto, donde el tratamiento de las magnitudes continuas, en los griegos, liga el proceso de configuración de un dominio numérico con la geometría, ya que esto es apenas tangencial en los trabajos aquí abordados.

El álgebra árabe y la teoría de ecuaciones

Un desarrollo consciente y profundo en lo que se refiere al estudio de ecuaciones algebraicas es llevado a cabo por los matemáticos árabes, quienes preservan, aprehenden y cultivan las ciencias que provienen de fuentes babilónicas, hindúes y griegas. Si bien la matemática árabe tiene su período de máximo esplendor entre los siglos IX y XI, su influencia se percibe en Europa hasta muy entrado el Renacimiento, por lo que los matemáticos europeos continúan el estudio de las ecuaciones hasta las primeras décadas del siglo XIX. De esta manera el álgebra está ligada a la resolución de ecuaciones.

El álgebra en al-Khwarizmi

En este apartado trataremos de dilucidar la relación entre la aritmética y el álgebra, para lo cual tomamos, primordialmente, una traducción del texto de al-Khwarizmi de autoría de Rosen (1986), los resultados del análisis del texto de al-Khwarizmi realizados por Puig (1998) y los de Rashed (1984).

De la exposición de la estructura del libro y de algunos comentarios del propio al-Khwarizmi trataremos de captar la idea misma que él se hacía del álgebra, como también de la noción de ecuación y resolución, el tipo de problemas que resolvía y, en general, las características del pensamiento “algebraico” de aquella época, para mostrar que aquí hay un inicio de la teoría de ecuaciones, entendida como la determinación de unos objetos, desde el plano teórico, sin alusión a un contenido particular, sus relaciones, propiedades y su relación con lo numérico.

Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi escribió en Bagdad, entre el año 813 y 833, es decir bajo el reino de al-Mamun, su célebre obra *El libro conciso del cálculo de al-jabr y de al-muqabala.* Es la primera vez en la historia que se encuentra la palabra "álgebra" y que aparece en un título para designar una disciplina; pero, como lo iremos tratando, la autonomía de esta disciplina no está solamente asegurada por un nombre que le sea dado, sino que está igualmente consolidada por la concepción de un nuevo vocabulario técnico destinado a designar objetos y operaciones específicos. No es sólo un problema de nominación, esa nominación corresponde a un contenido concreto.

En la introducción de su libro, al-Khwarizmi enuncia su proyecto: dotar de un manual conciso en el que la gente se pueda servir para sus problemas de cálculo, para los cambios comerciales, para sus sucesiones y para la agrimensión de sus tierras. Las diferentes partes de su libro son sucesivamente consagradas a estos diferentes temas.

La primera parte, teórica, está destinada al establecimiento de este cálculo —*hisab*— de *al-jabr* y de *al-muqabala*; es decir, de sus términos primitivos y de sus conceptos. En la segunda, al-Khwarizmi fija igualmente las bases de procedimientos regulares que permiten llegar a solucionar los problemas de la práctica del cálculo a tipos algebraicos fundamentales. En cuanto a las últimas partes, de intención estrictamente práctica, tratan de la aplicación de este cálculo a las transacciones comerciales, a la agrimensión, a las medidas geométricas y, finalmente, a los testamentos.

Es importante anotar que en el libro no aparecen símbolos matemáticos en el sentido actual, ni siquiera los números aparecen escritos en cifras, sino en palabras, es decir, no utiliza la llamada numeración arábiga. Estamos en el nivel del álgebra retórica[4], un texto escrito en lengua árabe y con algunas representaciones geométricas para validar las reglas; en otras palabras, el sistema matemático de signos corresponde fundamentalmente al lenguaje natural.

Los términos primitivos y una nueva teoría matemática

El examen del libro de al-Khwarizmi revela tres clases de términos primitivos, que corresponden a los tipos de números que aparecen en los cálculos: raíz, "posesión" o "tesoro" y simples números.

1. Una raíz es cualquier cosa que será multiplicada por sí misma, consistente en la unidad o números, hacia arriba, o fracciones hacia abajo.
2. Un tesoro es el valor total de una raíz multiplicada por sí misma.

[4] La división del álgebra en retórica, sincopada y simbólica se debe a G.H.F. Nesselmann en el libro *Die Algebra der Griechen*, Berlin, 1842 (Vasco, 1984, pp. 56).

3. Un simple número es un número cualquiera que puede expresarse sin atribuirlo a raíz ni a tesoro.

Los números son los racionales positivos, las operaciones aritméticas son las que hoy identificamos con los símbolos: +, ×, ÷, $\sqrt{\ }$, además, incluye la igualdad. Todas estas operaciones son a menudo designadas por palabras diversas.

Respecto a estos términos y su significado, Puig (1998) afirma que aunque tradicionalmente se han traducido por los términos del trinomio, en donde x^2 es el cuadrado de la x y corresponde a la traducción de la palabra árabe *māl* (esta palabra significa "tesoro" o "posesión"), no es la palabra que significa "cuadrado" en árabe. Por lo tanto, no es conveniente hacer corresponder a *māl* el significado de "cuadrado", ya que, de una parte carece del significado geométrico que tiene "cuadrado" y esto obstaculiza la comprensión cuando al-Khwarizmi explica que *māl* puede *representarse* por un "cuadrado"; de otra parte, si *māl* significa el cuadrado de la incógnita (x^2) no sería comprensible porque, después de encontrar la incógnita (la raíz), calcula su cuadrado, pues en esos casos el cuadrado es la incógnita. Como consecuencia de esto, se puede identificar la raíz de la ecuación como la raíz, advirtiendo que muchas veces la raíz (incógnita) de la ecuación es el tesoro mismo. Un ejemplo de ello se encuentra cuando al-Khwarizmi dice: "Un tesoro y diez raíces del mismo, igualan treinta y nueve *dirhams*"; es decir, ¿cuál será el tesoro que, cuando se aumenta con diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve? Si lo tuviésemos que traducir a nuestro sistema analítico sería $x + 10\sqrt{x} = 39$ y no $x^2 + 10x = 39$.

Sin embargo, para Rashed (1984), al-Khwarizmi designa por *māl,* casi siempre, el cuadrado de la incógnita y afirma que en su libro se designan dos clases de términos, los puramente algebraicos y los comunes al álgebra y a la aritmética; los primeros son la incógnita indiferentemente llamada *raíz* o *cosa*; su cuadrado *māl* y los segundos los números racionales positivos. Esta interpretación permite que Rashed afirme que, en cuanto a los términos algebraicos propiamente hablando, sería extraño que al-Khwarizmi no conociera más que los dos preferentemente citados, puesto que en algún caso él trata un problema cuyo contexto sugiere que recurre a la tercera potencia; este término no es, sin embargo, nombrado por al-Khwarizmi, ya que en efecto él escribe: "si llamamos un cuadrado —*māl*— multiplicado por su raíz, se convierte en tres veces el primer cuadrado". En esta lectura, en nuestro sistema de signos, se tendría $x^2 . x = 3x^2$ y no como lo sugiere Puig, $x . \sqrt{x} = 3x$. Lo que sí nos permite la lectura de Puig es comprender por qué no es necesario recurrir a la tercera potencia en este caso.

De acuerdo con la perspectiva del presente trabajo nos parece pertinente y bastante justificado el análisis de Puig, ya que nos desvela un esfuerzo por comprender tanto la naturaleza de los objetos matemáticos presentes en la obra de al-Khwarizmi, como las razones por las cuales establece una diferencia entre los términos primitivos y los que intervienen en el proceso de solución de los problemas (cuadrado, cosa), cuando se traducen a las formas normales, como lo veremos más adelante.

En relación con la naturaleza de los términos primitivos, su carácter monetario parece desvelar, que ante la carencia de un sistema de signos más sintético, son un recurso teórico para designar elementos esenciales de una teoría. Este carácter monetario se expone en los enunciados de los problemas cuando se relacionan tesoros, raíces de tesoros y monedas (*dirhams*).

Nótese que estos objetos matemáticos —algebraicos— tienen un compromiso ontológico con lo numérico y no con lo geométrico. Es decir, que se transita en el mundo de la cantidad y en las relaciones entre esas cantidades, como lo mostraremos a continuación.

La idea de ecuación, operaciones y resolución de ecuaciones

La noción de ecuación aparece desde el comienzo, por sí misma, y, podemos decir, que de manera genérica, en la medida en que no surge simplemente a lo largo de la solución de un problema, sino que es deliberadamente llamada a designar una clase infinita de problemas, puesto que se introduce la noción de forma normal. Al-Khwarizmi exige reducir —yarud, reducere—, sistemáticamente, cada ecuación a la forma normal correspondiente. La fórmula de la solución es justificada, matemáticamente, con la ayuda de una demostración geométrica,

Formas normales y ecuaciones

Así, pues, después de haber introducido los términos de su teoría, al-Khwarizmi escribe: "de estos tres tipos los unos pueden ser iguales a los otros, como cuando tú dices: los tesoros son iguales a las raíces, los tesoros son iguales a un número, las raíces son iguales a un número". Y prosigue: "Yo he encontrado que de estos tres tipos —*al-durub, modus*— que son las raíces, los tesoros y los números, se componen, y que tenemos tres géneros compuestos —*ajnas muqtarina*, genera, *composita*— que son tesoros más las raíces igual a un número, tesoros más un número igual a las raíces y las raíces más un número igual a tesoros" (Rashed, 1984). Estas posibilidades de combinación de los términos primitivos tienen el carácter de un conjunto completo de formas normales, así:

1. Tesoros igual a raíces,
2. Tesoros igual a números,
3. Raíces igual a números,
4. Tesoros y raíces igual a números,

5. Tesoros y números igual a raíces, y
6. Raíces y números igual a tesoros.

Hasta aquí, podemos decir que el texto de al-Khwarizmi se distingue de lo que se encuentra en los textos babilónicos, pues no se trata ya de una sucesión de problemas a resolver, sino de una exposición que parte de términos primitivos cuyas combinaciones deben dar todos los prototipos posibles[5]. Lo que significa, que establece un conjunto completo de formas canónicas, un conjunto completo de posibilidades y los procedimientos de solución de éstas.

Operaciones algebraicas

Las operaciones del cálculo de *al-jabr, al-muqa¯bala*[6], *reducir y completar,* tienen como propósito fundamental transformar la ecuación que resulta del proceso de modelación de un problema a una de las formas normales, en la cual no debe aparecer una cantidad negativa (cantidad "substractiva") y las cantidades de la misma especie estén agrupadas. Pero además hace falta que sólo haya un tesoro, ya que las reglas algorítmicas para resolver las formas normales están enunciadas para un tesoro.

La operación *al-jabr* o *restauración*, permite quitar las cantidades substractivas. Por ejemplo: en $x^2 - 3x = 4x + 3$ pasa por *al-jabr* a $x^2 = 4x + 3x + 3$ y en "cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho *dirhams*" $100 + 2t - 20c = 58$, al *restaurar* queda $100 + 2t = 58 + 20c$.

Reducir, radd, trata de que haya un solo tesoro. En nuestro primer ejemplo, no hay necesidad de reducir, hay un solo tesoro. En el segundo caso, al reducirse la expresión, dividiendo por dos, queda $50 + t = 29 + 10c$.

La operación *al-muqa¯bala,* u *oposición,* se encarga de eliminar la repetición de términos de la misma especie. Para $x^2 = 4x + 3x + 3$ por *al-muqa¯bala* queda $x^2 = 7x + 3$ y en $50 + t = 29 + 10c$ se obtiene $21 + t = 10c$.

En el caso de que haya partes de un tesoro, hay que aplicar la operación *completar, ikma¯l* o *takmi¯l.*

Fórmulas y reglas de resolución

La exposición de al-Khwarizmi evoluciona al mostrar cómo resolver cada una de las formas normales y cómo todos los problemas tratados en álgebra deben ser llevados a una forma normal con un solo tesoro y coefi-

5 Según Rashed, al-Khwarizmi expone estos prototipos en tres ecuaciones binómicas y tres ecuaciones trinómicas: $ax^2 = bx, ax^2 = c;\ ax^2 + bx = c;\ ax^2 + c = bx;\ ax^2 = bx + c$

6 Mucho se ha discutido sobre el sentido de las palabras *al-jabr* y *al-muqa¯bala* , ver al respecto: Vasco, C. (1983, pp. 10 y 11).

cientes racionales positivos. Estas formas normales se pueden pensar como las únicas ecuaciones permitidas en el libro de al-Khwarizmi. Las operaciones restaurar, reducir, oponer y completar son, pues, aplicadas para que la ecuación sea puesta bajo su forma normal, y expone la solución como un algoritmo para cada clase de problemas. Al-Khwarizmi se encuentra entonces en la situación de escribir que todo lo que revela el álgebra debe llevar a uno de los seis tipos de formas normales descritos en su libro. Aquí mostraremos las reglas de solución para la cuarta y la quinta forma normal. Para la cuarta —tesoros y raíces igual a números— en particular, tendríamos: Un tesoro y diez raíces del mismo tesoro igualan a treinta y nueve números. Es decir ¿Cuál será la cuantía del tesoro que, cuando se le añaden diez raíces del mismo tesoro, iguala el equivalente de treinta y nueve *dirhams*?

Al-Khwarizmi escribe: "la regla en este —fababahu, cujus regula— es que tú dividas las raíces en dos mitades, en este problema (se obtiene) cinco, que tú multipliques por el mismo, tendríamos veinticinco, le añades treinta y nueve, tendríamos sesenta y cuatro; toma su raíz que es ocho, y calculas la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres, que es la raíz del cuadrado que tú buscas, y el cuadrado es nueve"[7]. Para la quinta forma normal —tesoros y números igual a raíces— es como si dices, "un tesoro y veintiuno en números igualan diez raíces del mismo tesoro". Es decir, ¿cuál será la cuantía del tesoro que, cuando se le añade veintiún dirhams, iguala el equivalente de diez raíces del mismo tesoro?

La regla es: divide en dos las raíces; la mitad es cinco. Multiplícalo por sí mismo; resulta de ello veinticinco. Quítale el veintiuno asociado con el tesoro; el resto es cuatro. Extrae su raíz, es dos. Quítalo de la mitad de las raíces, que es cinco; queda tres. Esto es la raíz del tesoro que pedías y el tesoro es nueve. O puedes añadir la raíz a la mitad de las raíces, eso será siete; es la raíz del tesoro que tú pedías y el tesoro mismo es cuarenta y nueve. Cuando encuentres un ejemplo que te conduzca a este caso, intenta la solución por adición, y si esto no te ayuda, la substracción servirá ciertamente. Porque en este caso se puede emplear tanto la adición como la substracción, lo que no se puede en ninguno de los otros casos en los que haya que dividir en dos las raíces.

Para concluir este apartado, al-Khwarizmi escribe:

> Estos son los seis tipos que he mencionado al inicio de mi libro. He logrado su explicación y he dicho que hay tres en los cuales no se dividen las raíces

7 Lo que se ha traducido tradicionalmente por: $x^2 + px = q$, si $p = 10$, $q = 39$, entonces:

$$x = \left[\left(\frac{p}{q}\right)^2 + q\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{p}{2} = \left[\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{10}{2} = [(5)^2 + 39]^{\frac{1}{2}} - 5 = 3$$

> en dos mitades. Yo he mostrado sus reglas y su necesidad. En cuanto a aquellas en las que es necesario partir las raíces en dos mitades, en los tres tipos que restan, las he explicado por razones y he presentado para cada una una figura, por la cual se puede reconocer la causa de la partición en dos mitades.

El trabajo de al-Khwarizmi es importante por los métodos que introduce para resolver problemas tipos, formas canónicas, que se extienden en forma paralela a los problemas que tienen la misma estructura. Describe un programa, da un algoritmo, para obtener la solución en un número finito de pasos que no dependen de los números particulares que están dados en el problema, sino de sus relaciones mutuas —comparando los coeficientes de las raíces—. En este sentido, el álgebra aporta una manera general de referencia de la cantidad, de lo numérico. Hecho importante que luego Vieta, al introducir una forma particular, simbólica, de designar los objetos, permite a su vez una forma de expresar la generalidad de la estructura algebraica de los conjuntos numéricos. Lo que significa que la originalidad de este trabajo no se encuentra en los algoritmos propiamente dichos, algunos de los cuales ya se encontraban en la matemática egipcia, otros en la de los babilonios y la mayoría en la matemática india. La originalidad se encuentra en la decisión del autor de clasificar las ecuaciones canónicas y de establecer un vocabulario tanto para los objetos matemáticos como para las relaciones y aun para los razonamientos.

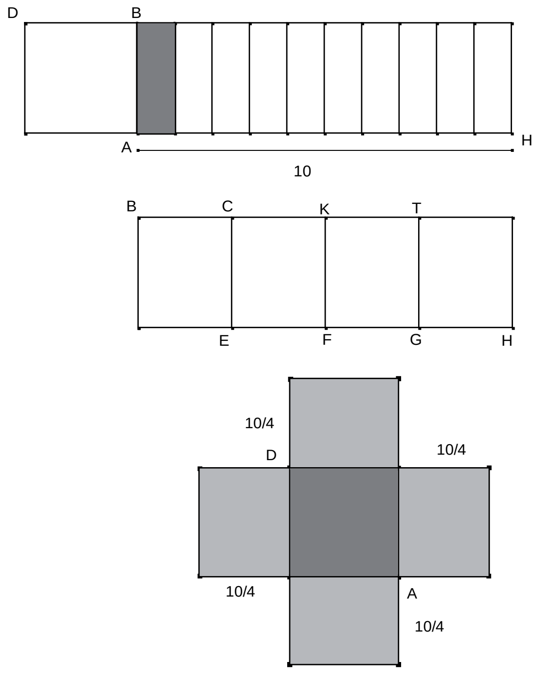
En consecuencia, si se toma desprevenidamente el libro de al-Khwarizmi parece no reafirmar más que una técnica algebraica bastante elemental; pero es importante comprender que esta simplicidad corresponde de hecho exactamente a las limitaciones impuestas por la construcción de la teoría en un sistema matemático de signos que limita una visualización más precisa de conceptos y procedimientos. E incluso las innovaciones terminológicas estaban destinadas a crear una lengua susceptible de traducirse indiferentemente a los términos de la geometría y de la aritmética. Así, expresando una exigencia de la teoría, reflejan también la necesidad de distinguir la nueva sabiduría, la nueva propuesta teórica. Además, notemos cómo tensionan el campo numérico las reglas de resolución de ecuaciones, es decir, se hace necesario hacer restricciones para que la solución esté en el campo de los números racionales positivos y a su vez tomar conciencia sobre cuándo una ecuación no tiene solución. Esto último, dado que la validación de las reglas está en el mundo de las magnitudes geométricas y es necesario hacer esta validación, producto de la tradición griega. Por lo tanto, a pesar del compromiso antológico de los objetos algebraicos con lo numérico, en al-Khwarizmi no hay una independencia ontológica con lo geométrico, que compromete la validación de las reglas.

Sobre la demostración de las reglas

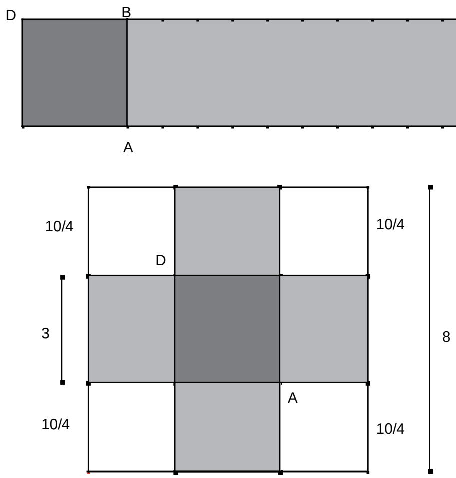
Aunque en el texto de al-Khwarizmi, en la demostración de la validez de la regla, sólo aparece la figura final después de la frase "Esta es la figura" y en el texto de Puig (1998) hay una propuesta desmenuzada de esa demostración, aquí presentamos una forma intermedia de estas dos, que nos permite comprender la manera como trata las magnitudes y su relación con lo numérico. Una primera precisión que hace Puig (1998) corresponde a la determinación de las magnitudes que se usan, dice: "vale la pena entretenerse en observar el cuidado que tiene al-Khwarizmi de indicar que el cuadrado es una *representación* del tesoro —distinción que obviamente desaparece si se traduce *māl* por "cuadrado" o por x^2—, y la distinción que hace entre la raíz del tesoro, que está representada por un lado del cuadrado que representa el tesoro, y la raíz de la superficie, que es un rectángulo de lado la raíz del tesoro y ancho una unidad, lo que permite representar las (diez) raíces". Para la demostración de la regla de la cuarta forma normal tenemos:

Un tesoro y diez raíces del mismo tesoro igualan a treinta y nueve números.

Representamos el tesoro como un cuadrado cuyos lados son desconocidos, la superficie *AD* y añadimos el paralelogramo, donde uno de sus lados es igual a uno de la superficie *AD*, la superficie *HB*. Las dos superficies juntas equivalen en números a 39. Pero como cada lado del cuadrado se considera como una de las raíces, los cuatro lados equivalen al total de raíces, y cada uno con un valor de 10/4 (cantidad de superficie). La superficie *HB* se divide en cuatro rectángulos por los puntos *E*, *F* y *G* con los segmentos *CE, KF, TG*, de longitud igual a un lado del cuadrado. Se hace la configuración en forma de cruz de tal forma que las 10 raíces quedan distribuidas donde corresponden y la nueva figura, también equivale a 39.

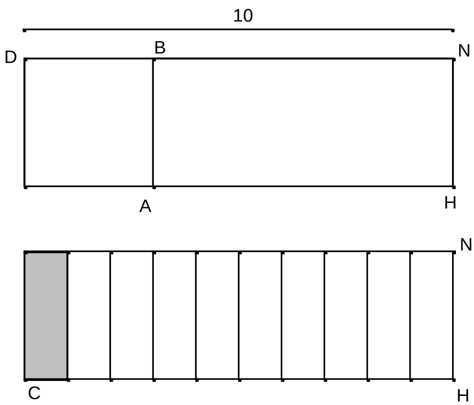


Se prolonga cada uno de los segmentos paralelos a las raíces, en ambas direcciones, una longitud de 10/4, de tal manera que se completa un cuadrado de lado $2\left(\frac{10}{4}\right)$ más la raíz del cuadrado (desconocida) y se configuran cuatro cuadrados pequeños de superficie $\left(\frac{10}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Por lo tanto, el valor de la superficie del cuadrado grande es $39+4\left(\frac{25}{4}\right)=39+25=64$ y cada una de sus raíces 8. El lado del cuadrado que representa el tesoro es $8-2\left(\frac{10}{4}\right)=8-5=3$.



Y para la demostración de las reglas de la quinta forma normal tenemos:

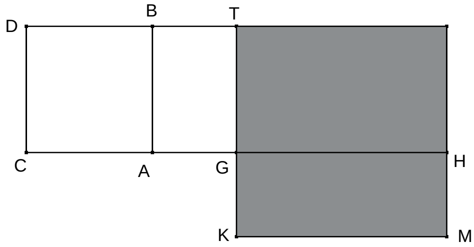
Cuando un tesoro y veintiún *dirhams* son iguales a diez raíces, representamos el tesoro como un cuadrado cuyos lados son desconocidos, que es la superficie *AD*. A ésta añadimos un paralelogramo, la superficie HB, cuya anchura, esto es, el lado *HN*, es igual a uno de los lados de la superficie *AD*. La longitud de las dos superficies juntas es igual al lado *HC*. Sabemos que su longitud es en números diez, ya que cada cuadrado tiene iguales sus lados y sus ángulos. Si uno de sus lados del cuadrado (raíz del tesoro) se multiplica por uno, eso da la raíz de la superficie. Cuando se declara que el tesoro y veintiún números es igual a diez de sus raíces. Sabemos que la longitud del lado *HC* es igual a diez números, ya que el lado *CD* es una raíz del tesoro.

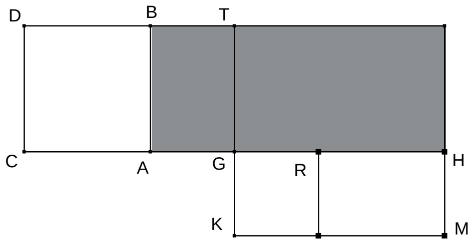


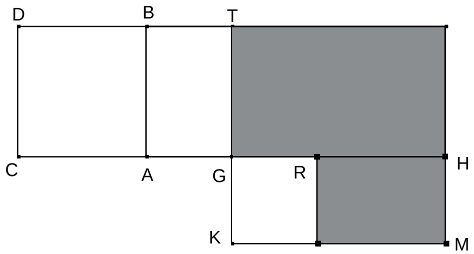
Dividimos el lado CH en dos mitades por el punto *G*. Entonces sabes que la línea *HG* es igual a la línea *GC*, y que la línea *GT* es igual a la línea *CD*. Entonces extendemos la línea *GT* una distancia igual a la diferencia entre la línea *GC* y la línea *GT* para cuadrar la superficie.

Entonces la línea *TK* es igual a la línea *KM*, y resulta un cuadrado, de lados y ángulos iguales, que es la superficie *MT*. *Sabemos que la línea TK es cinco* y ésa es consecuentemente la longitud de los otros lados. *Su superficie es veinticinco* (obtenida por la multiplicación de la mitad de las raíces por sí mismo).

La superficie *HB* representa los veintiún números que se añaden al tesoro y sabemos que la superficie *HT* añadida a la superficie *MR* es igual a la superficie *HB* que es veintiuno.

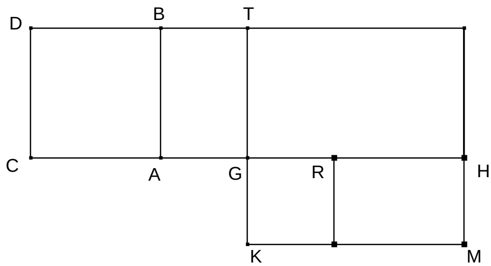


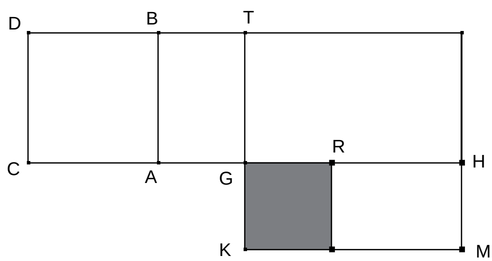




La superficie *MT* es veinticinco. Y así, restamos de la superficie *MT*, la superficie *HT* y la superficie *MR*, entre ambas igual a veintiuno. Nos queda una superficie pequeña *RK*, que es veinticinco menos veintiuno, que es cuatro. Su raíz, la línea *RG*, es igual a la línea *GA*, que es dos. *Si lo restamos de la línea CG, que es la mitad de las raíces*, queda la línea *AC*, que es tres. Esta es la raíz del primer tesoro.

Si se añade la línea *CG*, que es la mitad de las raíces, resulta siete, o la línea *RC*, la raíz de un tesoro más grande. Si se añade veintiuno a este tesoro, también el resultado será diez de sus raíces.





Una de las cosas que distingue a al-Khwarizmi de sus predecesores árabes de la antigüedad o de la India, es su deseo de justificar los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas.

Se podría afirmar que el tratado de al-Khwarizmi, en términos de la justificación y demostración de sus algoritmos, no aporta al calculador, pero permite al autor mostrar que su trabajo es científico, en el sentido de que sus objetos matemáticos han sido definidos y las propiedades que se derivan de aquellos han sido demostradas.

Además, la demostración en al-Khwarizmi tiene una tendencia analítica ya que supone que la ecuación se satisface, en esto y porque involucra números, se diferencia de una demostración euclidiana. Al involucrar números identifica lo que se mide con la medida misma y al diferenciar la raíz del tesoro de la raíz de la superficie. Sin embargo, parece que solamente magnitudes geométricas se involucran en el razonamiento, pues las medidas de esas magnitudes se usan para calcular aunque la generalidad de la demostración se sigue de la generalidad de su aritmética.

Es importante aclarar que la demostración en Euclides tiene un claro sabor lógico, puesto que las formas lógicas *p implica q* y *q es consecuencia de p* se utilizan frecuentemente. En este sentido sus demostraciones poseen un carácter más general y más intelectual que aquellas de al-Khwarizmi, aun haciendo precisos los conceptos de magnitud y unidad de medida utilizados y respetando los principios de homogeneidad en las especies con las que opera.

En conclusión, las pruebas del matemático de Bagdad son pragmáticas, se apoyan en diagramas a los que hay que observar y usar en un razonamiento cuyas etapas son asistidas por el lenguaje ordinario (adición o sustracción de figuras al diagrama inicial, aplicación de áreas o atención a la homogeneidad de los términos sobre los que se opera). Estas formas de justificación son retomadas por la mayor parte de los sucesores de al-Kwarizmi, aun aquellos que adoptan pruebas nuevas.

Sobre los problemas y sus soluciones

Los problemas[8] aparecen en el libro de al-Kwarizmi después de expuesta la parte teórica, y estos son modelados por ecuaciones que deben reducirse a una de las formas normales aplicando las operaciones pertinentes de la teoría, para ser solucionados aplicando las reglas enunciadas para cada caso.

Un nuevo término: "cosa" *(shay)* aparece en el proceso de construcción de la ecuación, en ningún caso aparece en el enunciado del problema. Se importa del lenguaje ordinario y se usa para referir a la cosa buscada. Se la emplea para identificar dentro del problema el número que se va a determinar a partir de los números dados. Una ecuación deviene así del establecimiento de una relación binaria, mediante la igualdad, de tres especies: las cosas, sus productos por sí mismos y los números dados en el enunciado. El estatuto de la representación de incógnita ha evolucionado en tanto tiene una designación específica.

Presentamos un ejemplo, expuesto por Puig (1997), del proceso utilizado por al-Khwarizmi en el tratamiento de los problemas, para mostrar la coherencia de su propuesta teórica.

> He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resulta cincuenta y ocho *dirhams*.

Construcción de la ecuación:

Haces una de las partes cosa y la otra diez menos cosa.	Si representamos cosa por c, entonces: c, 10-c.
Multiplica luego diez menos cosa por sí mismo, resulta cien y un tesoro menos veinte cosas.	Si representamos Tesoro por t, entonces: $(10-c)(10-c)$ es $100 + t + 20c$
Multiplica luego cosa por cosa, resulta tesoro.	$c.c$ es t
Suma luego ambos, resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho *dirhams*.	$100 + 2t - 20c = 58$

8 En Puig (1997) se anota, sobre las clases de enunciados de los problemas tratados por al-Kwarizmi: Los *enunciados* de los problemas son de dos tipos: (a) La historia trata sobre el número diez, que se ha dividido en dos partes; se han realizado varias operaciones aritméticas con las partes y se da el resultado de esas operaciones o una igualdad entre los resultados de series de operaciones. Las incógnitas del problema son las dos partes en que se ha dividido diez. (b) La historia trata de un tesoro al que se le han realizado varias operaciones aritméticas y se da el resultado de ellas en *dirhams* o en tesoros. La incógnita es el tesoro.

Reducción a la forma normal:

Restaura luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas substraídas y súmalas a los cincuenta y ocho, resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho *dirhams* y veinte cosas.

$$100 + 2t = 58 + 20c$$

Reduce luego eso a un solo tesoro tomando la mitad del conjunto, resultan cincuenta *dirhams* y un tesoro igual a veintinueve *dirhams* y diez cosas.

$$50 + t = 29 + 10c$$

Opón luego con ése el otro, quitando veintinueve de cincuenta, quedan veintiún *dirhams* y un tesoro igual a diez cosas.

$$21 + t = 10c$$

Aplicación de la regla:

> Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco; multiplica por sí mismo, resulta veinticinco. Quita luego de esto el veintiuno conectado con el tesoro, queda cuatro. Extrae luego su raíz, es dos. Quítala luego de la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres.

Resultado: Es una de las dos partes, y la otra es siete.

NÚMERO Y ÁLGEBRA EN AL-KHWARIZMI

Así, pues, acabamos de mostrar que fue al-Khwarizmi el que constituyó las piedras angulares de una nueva disciplina; gracias a la generalidad del objeto matemático que trata la disciplina y a la generalidad de sus operaciones. Se trata en efecto de operaciones sucesivas destinadas a llevar un problema numérico o geométrico a una de las ecuaciones, puesta bajo su forma normal; y de aquellas que permiten llevar a continuación a las fórmulas canónicas de las soluciones, las cuales deben ser, a la vez, demostrables y calculables.

Es decir, el álgebra como un cálculo —hisab—, como escribió al-Khwarizmi, es también una ciencia aplicada, primero porque se puede aplicar a diferentes objetos una vez formuladas en los términos primitivos del álgebra las leyes de la aritmética, y porque se encuentra en la salida conocida de sus posibilidades de aplicación, y responde así a las necesidades prácticas del cálculo. Su objeto no es un ser particular, ya que se trata tanto de números como de magnitudes geométricas.

Podemos afirmar, utilizando un lenguaje técnico actual, que el álgebra según al-Khwarizmi tiene que ver con la teoría de ecuaciones lineales y cuadráticas con una sola incógnita y el cálculo elemental de binomios y trinomios asociados. Pero si al-Khwarizmi se atiene, además, al segundo grado, es simplemente en razón de la idea misma de la solución y la prueba en la nueva disciplina. La solución debe ser a la vez general y calculable, y de una generalidad que sea además matemáticamente —y por tanto geométricamente— fundada. Solamente, de hecho, la solución por radicales podría responder a las exigencias de al-Khwarizmi, y por tanto se aclara la restricción del grado y del número de términos primitivos.

Desde su auténtico comienzo, el álgebra se presenta, pues, como una teoría de ecuaciones resolubles por radicales, y de cálculo algebraico sobre las expresiones asociadas, sin que sea formulada todavía la idea de polinomio en general. Esta concepción sobrevivirá durante largo tiempo a al-Khwarizmi, puesto que sus sucesores inmediatos se dedicaron precisamente al estudio de las ecuaciones de grado superior, pero pudieron llegar a la ecuación de segundo grado. Otros fueron tentados por la solución por radicales de la ecuación cúbica. Es suficiente convencerse de la influencia de al-Khwarizmi, recordado como al-Khayyam, que rehúsa considerar como algebraica la solución de la ecuación cúbica con la ayuda de intersección de curvas, y consagra este calificativo a la sola solución por radicales.

Así, pues, podemos encontrar algunas características esenciales y fundamentales sobre la manera como empiezan a constituirse los objetos algebraicos en la teoría de ecuaciones. Como sabemos, al-Khwarizmi utilizaba un lenguaje verbal, retórico, en el que los números se designaban con palabras, pero es uno de los primeros en referirse a las cantidades como números y no simplemente en tanto magnitudes geométricas como lo hacían los griegos y esto es uno de los hechos fundamentales en el tipo de concepción matemática que tenían los árabes. De esta manera se puede pensar que al intentar desligarse un poco los árabes de la parte geométrica para incorporar conceptos algebraicos, es decir, al considerarse la cantidad como número, se puede pensar que los árabes están haciendo referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada —podríamos hablar de una existencia ideal— y de esta manera tendían a alejarse un poco del enfoque de lo construido; es decir, aunque los árabes quisieran conservar aspectos de la tradición subcientífica a través de verificaciones geométricas de sus algoritmos, al considerar una cantidad como un número se puede entonces pensar que este objeto cantidad (número) es producto de la mente o simplemente es considerado también como un objeto eterno, anterior a la actividad del individuo.

Con esto no se pretende sustentar que el álgebra árabe era de concepción platónica; por el contrario, teniendo en cuenta que el álgebra árabe surge como una necesidad del hombre por resolver ciertos problemas de la época, es decir sus teorías y conceptos se originan a través de la actividad de los individuos, es pertinente reflexionar que no basta con situar la concepción de estos objetos matemáticos a las experiencias reales del hombre en el marco de una actividad, pues se están considerando entes matemáticos como objetos dados, en este caso los números, de esta manera llegamos a plantearnos un fuerte interrogante: ¿Cuáles son las condiciones bajo las cuales se convalida la existencia o no existencia de un objeto matemático determinado? En realidad, para responder a este interrogante es necesario apropiarse de una idea de objeto matemático lo suficientemente consistente y establecer bajo qué condiciones un sujeto accede a este particular modo de realidad, pero teniendo en cuenta los propósitos de esta reflexión podemos decir que los objetos matemáticos que se involucran en el álgebra árabe como son los términos primitivos y la clase de formas normales nacen de un proceso de objetivación cultural; es decir, son patrones fijos de actividades cuyos orígenes resultan no de una contemplación intelectual de estos objetos, sino de actividades que llevaron a estos individuos a darse cuenta de estos; sin embargo, tuvieron como referencia algunos objetos que consideraban como ya dados; es decir, que su existencia era independiente de las actividades que estos realizaran y esos objetos son los números.

Ahora bien, teniendo en cuenta la forma en que pueden concebirse estos objetos matemáticos en el álgebra árabe, veamos por qué ellos posibilitan el inicio de la teoría de ecuaciones: Dado que en el enunciado del problema se establece una incógnita, entonces las operaciones narradas se expresan como operaciones de la incógnita. Las expresiones resultantes se transforman en resultados establecidos, se igualan las dos expresiones para formar una ecuación; después de establecer la reducción a una forma normal se aplican los procedimientos operatorios o algorítmicos, los cuales producen un resultado que se expresa en términos de la incógnita del problema. En otras palabras, se puede decir que en el álgebra árabe se establece el método general de solución de ecuaciones que consiste en la transposición de los términos de una ecuación y la agrupación de términos semejantes. Observemos que este proceso constituye una de las bases fuertes en la consolidación del álgebra moderna.

Desde la perspectiva de constitución de un objeto matemático, se puede decir que el concepto de ecuación en las matemáticas árabes constituye un nivel diferente al que se podría encontrar en los trabajos matemáticos de los antiguos babilonios. Esto se puede entender en la medida en que el contenido y la expresión de ese contenido relativa a las relaciones entre cantidades numéricas en formas generales, se llevan a unos moldes canónicos que dan cuenta de un proceso de generalización. “Dicho de otra manera, antes de al-Khwârizmî se sabía resolver problemas cuadráticos con procedimientos tipificados, quizá incluso se sabía resolver cualquier problema cuadrático, pero no se sabía que se sabía resolver todos los problemas cuadráticos” (Puig, 1998).

Ahora, si bien es cierto que el álgebra árabe presenta otros expositores importantes como Omar al-Khayyam (1048-1131) y Sharaf ad-Din at-Tusi (1135-1213) quienes en lugar de proponer soluciones mediante radicales buscan soluciones geométricas y extienden la tipología de las ecuaciones cuadráticas a las ecuaciones de tercer grado, lo que significa que no sólo continúan ampliando el plan teórico de al-Khwarizmi, sino que generan otras ideas y teorías fundamentales en el álgebra y la teoría de ecuaciones, como la idea de solución de ecuaciones en términos de la intersección de curvas (secciones cónicas). Nuestro interés radica fundamentalmente en la relación aritmética - álgebra y por ello centramos la atención, no en éstos, sino en otro representante de tal problemática como Girolamo Cardano, del Renacimiento italiano. Para lograr tal propósito nos fundamentamos, de manera preferencial, en una traducción al inglés de Witmer (1993) del trabajo mismo de Cardano, el *Ars Magna*; el trabajo de Vasco sobre el *Álgebra Renacentista* (1983) y los de Acevedo sobre teoría de ecuaciones (1997).

El álgebra del Renacimiento y la tensión del campo numérico

Para los desarrollos posteriores a las matemáticas griegas y árabes era necesaria la expansión de una numeración más ágil que la utilizada por las culturas orientales y helénicas (letras del respectivo alfabeto) y un sistema matemático de signos cada vez más refinado. En relación con el sistema de numeración, este hecho se da en los hindúes en el siglo VII, pero sólo a comienzos del siglo VIII aparece el primer matemático hindú que utiliza consistentemente la numeración decimal y desarrolla varios métodos algebraicos: Brahmagupta. Esta numeración no se había generalizado en la India y era desconocida por los árabes y lo seguiría siendo hasta la segunda parte del siglo IX (Bashkara, en la India y Omar Khayyam, en el cercano Oriente). Los astrólogos de los templos y las cortes son los primeros en utilizar esta numeración en Europa en el siglo X, pero esta no se extenderá hasta que los traductores de manuscritos empiecen a trabajar en la mitad del siglo XII. Sólo la imprenta y la difusión de las aritméticas impresas a fines del siglo XV marcarán el triunfo definitivo de la llamada numeración arábiga. Con esto la viabilidad de las operaciones y el desarrollo y difusión de la aritmética se hace evidente. En la segunda mitad del siglo XIII comienza la manipulación mecánica de símbolos numéricos con la introducción definitiva de la numeración decimal, en las obras de Fibonacci (*Libro del ábaco, La práctica de la geometría*, la *Flor* y el *Libro de los cuadrados*) y otros matemáticos de Italia, Francia, Inglaterra y Alemania.

La peste negra (1346 - 1356) y la guerra de los cien años entre Francia e Inglaterra detendrá los avances científicos y culturales en el siglo XIV, no obstante, aunque figure el siglo XIV como una edad oscura, aparecen copias y comentarios de las obras del siglo anterior, y algunos trabajos de matemáticos como Bradwardine (1290 - 1346), en los ingleses, con un trabajo de proporciones en el cual extiende la idea de proporción más allá de la proporción simple, se afirma que es el gestor de modelos exponenciales y logarítmicos; como también, de Juan de Muers (1310 - 1360) y de Nicolás Oresme (1323 - 1382) en Normandía. Este último escribió algunas obras sobre proporciones y aritmética en general, en las cuales considera una suma de una serie infinita, la invención de unos operadores equivalentes a los exponentes fraccionarios hoy, como extensión del estudio de las proporciones, todo esto desde el plano teórico, exclusivamente. Además, se extienden las maneras de disponer las operaciones, como la multiplicación y la división, para facilitar los cálculos. Estos son ejemplos de los desarrollos posibles por un sistema matemático de signos potente, como la numeración decimal. De otra parte, se ven los desarrollos para expresar operaciones y relaciones numéricas y algebraicas de forma cada vez más sintética, iniciando este proceso con la incorporación de abreviaturas de palabras y símbolos y que da origen al denominado lenguaje sincopado.

Johannes Regiomontanus[9] es un exponente de esto; su notación manuscrita decidiría el empleo de muchos símbolos de abreviación en los libros impresos posteriormente. En sus trabajos, Nicolás Chuquet utiliza sistemáticamente abreviaturas para raíces (primera, segunda, tercera), para raíces de raíces, el signo menos no sólo para la resta, sino para números negativos aislados, exponentes para la dimensión del número aludido, etc. Pero la generalización de esta forma de producción de conocimiento no se generalizaría sino hasta el trabajo de Luca Pacioli con su *Summa* (1494), el texto básico de todos los algebristas italianos del siglo XVI; su mérito está en hacer asequibles los métodos (aritméticos y algebraicos) conocidos y en la sistematización de las abreviaturas para los cálculos[10].

Notemos que las condiciones de base científica están aseguradas por la proliferación de las aritméticas impresas (Gutemberg completa la primera imprenta en 1440) y por la difusión de la *Summa* de Pacioli, además de las condiciones económicas y sociales que permiten recibir a los grandes algebristas del Renacimiento de los siglos XV y XVI.

El *Ars Magna* de Cardano y una teoría general de solución de ecuaciones

El *Ars Magna* de Cardano pertenece a la primera mitad del siglo XVI, el cual salió a la luz pública en el año 1545. Esta obra sustenta tanto cues-

9 Sus cálculos algebraicos siguen los métodos árabes popularizados en Europa desde el S. XIII. Los planteamientos son siempre en palabras, y esta “álgebra retórica” domina el lenguaje matemático de Regiomontanus (excepto la notación para los números). Pero en sus cartas y notas manuscritas empieza a utilizar una serie de abreviaturas que se desarrollan casi simultáneamente en toda Europa a fines del S. XV: es el “álgebra sincopada” o abreviada (Vasco, 1983).

10 Pero Luca Pacioli perfecciona las abreviaturas de tal manera que estas se pueden clasificar como minimales. Apenas es posible pensar en una ulterior comprensión de las letras de una palabra sin caer en ambigüedades. Se llega con la “Summa” al último límite de las abreviaturas, que serán utilizadas durante todo el S. XVI. Para superar este límite, habrá que llegar a la refundición del álgebra sincopada que llamaremos el álgebra simbólica, y que constituye un nuevo modo de producción de conocimiento matemático.

tiones que muestran cómo el autor ha roto con ataduras de las matemáticas anteriores, así como aquellos aspectos que dejan ver hasta qué punto las concepciones de la época, respecto al concepto de número y las relaciones dimensionales de las cantidades con lo geométrico, pueden obstaculizar una posibilidad de progreso científico.

Cardano comienza su libro haciendo un reconocimiento a sus antecesores árabes, también a Leonardo de Pisa, Luca Pacioli y a Del Ferro, Fior, Tartaglia y Ferrari, estos últimos, de quienes obtiene la solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado[11] y cuyo trabajo amplía y fundamenta en su obra. Pues bien, con el análisis del contexto matemático en el cual se encontraba Cardano y el de su libro, es posible determinar realmente su preocupación por consignar y desarrollar las soluciones generales a las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado, lo cual puede ser considerado como un intento por construir una teoría general de solución de ecuaciones, aunque veremos hasta qué punto puede Cardano lograr su propósito. Esta empresa, inicialmente, la podemos apreciar en la organización misma de su libro.

El primer capítulo sobre las soluciones dobles de cierto tipo de ecuaciones nos enfrenta de entrada al problema de la no aceptación de los números negativos; el segundo, sobre el total de casos de ecuaciones, presenta la consecuencia de la no aceptación de los negativos al enunciarse los distintos casos de ecuaciones cuadráticas y de tercer grado primitivas y derivadas por elevación de potencias (22 casos primitivos y 44 derivados). En el capítulo tercero, relacionado con las soluciones de casos simples, expone a partir de un caso (un problema), la manipulación de términos de las ecuaciones para obviar los números negativos, además de la cuidadosa verificación de los algoritmos y las reglas generales que se exponen. “Sobre las soluciones generales y particulares que siguen” y que corresponde al capítulo cuarto, Cardano clasifica las posibles soluciones de una ecuación en simples y constantes (binomiun) y sus correspondientes apotomes (recisum)[12]. En los capítulos quinto y sexto explica la solución de casos que conducen a ecuaciones cuadráticas, que llama menores.

En los capítulos siguientes trata sobre transformación de ecuaciones, de una parte, parejas de transformadas, pues al conocer la solución de una se

[11] Una buena referencia sobre esta disputa se puede apreciar en Vasco (1983, pp. 69-73).

[12] En una nota del traductor del *Ars Magna*, éste expone que en el capítulo tercero del libro de Cardano *Ars Magnae Arithmeticae*, este ilustra estos términos (en notación actual):

Constans (binomium)	Apotome (recisum)
$3+\sqrt{5}$	$3-\sqrt{5}$
$\sqrt{12}+3$	$\sqrt{12}-3$
$\sqrt{18}+\sqrt{10}$	$\sqrt{18}-\sqrt{10}$
$3+\sqrt{2}$	$3+\sqrt{2}$
$\sqrt{11}+2$	$\sqrt{11}-2$
$\sqrt{7}+\sqrt{3}$	$\sqrt{7}-\sqrt{3}$

puede calcular la de la otra; de otra parte, cómo ecuaciones polinómicas con coeficientes pueden transformarse a ecuaciones con enteros y, por último, trata el problema con dos cantidades desconocidas.

En los capítulos del XI al XXIII trabaja los 13 casos de las ecuaciones cúbicas primarias y sus demostraciones geométricas. En el capítulo siguiente, estudia las derivadas, como por ejemplo $x^6 + 6x^4 = 100$; a continuación, y hasta el capítulo XL, expone las reglas usadas para resolver ecuaciones. En el capítulo XIX aborda el problema de la solución general de la ecuación de cuarto grado.

El texto de Cardano es escrito en un lenguaje retórico con elementos de un álgebra sincopada, fundamentalmente para expresar operaciones; no obstante, expondremos su teoría usando el sistema de signos actual, pues no distorsiona las significaciones de las ideas expuestas en el texto del gran matemático del Renacimiento.

Soluciones dobles, raíces dobles y números negativos

En el primer capítulo del *Ars Magna* expone sobre las soluciones dobles, que surgen de ecuaciones donde intervienen potencias pares de las incógnitas, como:

$$x^2 = 9,\ x^2 = 16,\ x^4 = 81,\ x^4 + 3x^2 = 28,\ x^4 + 12 = 7x,\ x^4 + 12 = 6x,\ x^4 = 2x^2 + 8.$$

Cardano considera las raíces positivas como verdaderas y las negativas como ficticias o falsas. En el primero y segundo caso, de las ecuaciones anteriores afirma que si cada potencia par es igual a un número, sus raíces tienen dos valores, uno verdadero y otro negativo, las cuales son iguales una a otra (en valor), en el primero 3 y -3, en el segundo 4 y -4. Para la tercera, 3 y -3, que se deriva del primer caso. Esta regla se cumple, también, si tenemos, *la suma del cuadrado del cuadrado con el cuadrado igual a un número*, el resultado será el mismo como en el caso simple, en la cuarta ecuación, 2 y -2. Pero, *si el cuadrado de un cuadrado y un número son iguales a un cuadrado*, hay dos soluciones verdaderas y al mismo tiempo dos soluciones negativas, como en la quinta ecuación: 2, $\sqrt{3}$, -2, $-\sqrt{3}$ y para la sexta, concluye que si no hay una solución verdadera tampoco hay una falsa. Para el caso de la última ecuación de la lista anterior, *si el cuadrado de un cuadrado es igual a un número y un cuadrado*, hay siempre una solución verdadera y otra solución ficticia, 2 y -2. Lo que significa que establece las diferencias de las soluciones para estas ecuaciones de potencia par.

En este mismo capítulo, para las potencias impares, inicialmente, Cardano considera estas ecuaciones: $2x = 16$, $2x^3 = 16$, $2x^3 + 6x = 20$.

Concluye que para potencias impares siempre hay una solución verdadera, cuando está igualada a un número.

Luego, enuncia, en forma general, que cuando dos potencias impares y una constante se comparan, hay que determinar *primero si el producto de los dos tercios del coeficiente de la primera potencia por la raíz cuadrada de un tercio del mismo coeficiente es mayor, igual o menor al término constante*[13]. Cuando son iguales, la ecuación tiene dos raíces y una de las dos es verdadera (la raíz de un tercio del coeficiente de la primera potencia), como en la ecuación: $x^3 + 16 = 12x$ y corresponde, según Cardano, a 2, que es la raíz cuadrada de 4, y la falsa corresponde a -4[14]. Si el producto es mayor que el valor de la constante, habrá tres soluciones, dos verdaderas y una falsa, como en el caso de $x^3 + 9 = 12x$ y el valor numérico de la falsa corresponde a la suma de las verdaderas.

Cardano completa esta disertación sobre las soluciones dobles, estableciendo la solución de otras ecuaciones a partir de las obtenidas. Además, en algunos casos expone la regla para un caso específico y luego la enuncia en forma general y en otros enuncia primero la regla general y luego la ejemplifica. Trabaja, también, casos en los cuales se combinan potencias pares e impares y extensiones de la fórmula cuadrática y bicuadrática. Al final del capítulo presenta una demostración sobre el caso de *el cubo más constante igual a la segunda potencia más la primera*, desde la perspectiva geométrica y anuncia que esto se hará en todo el libro, como efectivamente lo hace.

Es importante resaltar, hasta aquí, el trabajo de Cardano, sobre la formulación de reglas basadas en las relaciones numéricas de los coeficientes de los términos de la ecuación y las soluciones o raíces de ésta, el interés en el número de raíces que resultarán de la solución de la ecuación y la clase de raíz que se obtendrá. Problemas fundamentales, del desarrollo del pensamiento algebraico y de la teoría de ecuaciones, que desembocarán en el teorema fundamental del álgebra, cuando el interés radica en prever cuántas y cómo serán las raíces, sin importar cuáles son, específicamente. Es decir, cuando el problema de determinar las raíces pasa a ser el de anticipar su existencia.

Desde el inicio de este trabajo se muestra el reconocimiento de cantidades negativas que surgen de solución de ecuaciones, aunque no se admitan como soluciones de estas ecuaciones. Se aprecia el "temor" de Cardano en el trabajo con los números negativos, esto se refleja en la forma como él se refiere a dichos números en este capítulo del libro; aquí reconoce, por ejemplo, que el 9 se deriva igualmente como cuadrado de 3 y -3, y añade inmediatamente que un cubo negativo, que llama "debitum" o "deuda", no puede provenir de un "número verdadero", califica las soluciones negativas

13 Para $2x^3 + px = q$ entonces, se compara $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$ con q. Cuando son iguales la ecuación tiene dos raíces, una verdadera y otra falsa. La verdadera corresponde a $x = \sqrt{\frac{1}{3}p}$.

14 Nótese que la raíz doble (2) se toma como una sola, lo que daría dos soluciones de ecuación de tercer grado, aun cuando Cardano reconoce que a este tipo de ecuaciones le corresponden tres raíces.

como “ficticias”; en el capítulo III las llama “inútiles y falsas”. Cardano se ve abocado a respetar una concepción relacionada con estos números “no verdaderos”. No obstante, los manipula, opera con ellos y sabe que son el resultado de un proceso o algoritmo aplicado correctamente para obtener la solución de una ecuación.

De esta forma Cardano no sólo descalificaba los números negativos como soluciones de las ecuaciones sino que su rechazo lo obligaba a trabajar laboriosamente con diferentes casos para un mismo tipo de ecuación, puesto que siempre busca establecer una ecuación en la cual los coeficientes debían ser necesariamente positivos, es por ello que el capítulo II, como lo hemos anotado antes, concluye con la lista completa de las ecuaciones cuadráticas y cúbicas, 22 casos primitivos y 44 derivados. Los capítulos XI a XXIII se dedican a la solución de las 23 cúbicas primarias y sus demostraciones geométricas; en el capítulo XXIV estudia los 38 casos derivados. Teniendo en cuenta estos capítulos mencionados, es posible determinar que el propósito de Cardano por construir una teoría general de soluciones de ecuaciones estaba lejos de ser establecida así, pues la falta de aceptación de los coeficientes negativos en las ecuaciones, lo llevó a contemplar casos y casos de cada tipo de ecuación (cuadrática, cúbica) de forma detallada, según los términos de los diversos grados que debían aparecer en el mismo o en diferente miembro de la ecuación, puesto que los coeficientes sólo debían ser positivos, tratando cada caso de la ecuación como un problema diferente, aunque relacionados.

Solución de ecuaciones cúbicas y “continuidad”

La estructura de los capítulos donde Cardano aborda la solución de las ecuaciones cúbicas, es constante. En el título aparece el caso que va a tratar, luego la demostración de la regla, desde la perspectiva geométrica, acompañada de su explicación, después la regla expuesta en forma general y luego algunos ejemplos. Trabaja la cúbica reducida directamente[15] o hace transformaciones para obtenerla[16], ésta con coeficientes positivos. Todos los ejemplos que presenta son numéricos, con coeficientes enteros positivos.

Para *el cubo y la primera potencia igual a número*: $x^3 + px = q$, la regla que Cardano da en su *Ars Magna* es la siguiente:

15 Cubo y primera potencia igual a número, cubo igual a primera potencia más número y cubo y número igual a primera potencia. No hay término cuadrático.

16 Como en los casos: Cubo igual a cuadrado más número; cubo y cuadrado igual a número; cubo y número igual a cuadrado; cubo, cuadrado y primera potencia igual a número; cubo y primera potencia igual a cuadrado y número; cubo y cuadrado igual primera potencia y número; cubo igual a cuadrado, primera potencia y número; cubo y número igual a cuadrado y primera potencia; cubo, primera potencia y número igual al cuadrado y cubo; cuadrado y número igual a primera potencia.

> *Elevas al cubo un tercio del coeficiente de la primera potencia; sumas a lo obtenido el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación; tomas la raíz cuadrada de todo esto. Duplicarás esto y a uno de los dos agregas la mitad del número que ya elevaste al cuadrado y de lo otro restas la mitad de lo mismo. Tendrás entonces su* binomio *y su* apotome. *Entonces, sustraes la raíz cúbica de la* apotome *de la raíz cúbica del* binomio*; el residuo o lo que es dejado es el valor de la raíz.*

Esta regla, demostrada por Cardano, la ilustra con varios ejemplos:

$$x^3 + 6x = 20,\ x^3 + 3x = 10,\ x^3 + 6x = 2.$$

Para el primero, tenemos, un tercio de 6 es 2 y elevado al cubo obtenemos 8. La mitad de la constante de la ecuación es 10 y lo elevamos al cuadrado y se obtiene 100; sumamos esto con lo anterior y se obtiene 108; luego, tomamos la raíz cuadrada de que es $\sqrt{108}$. Esto lo duplicamos y a una le adicionamos 10, que es la mitad de la constante 20 y a la otra le substraemos lo mismo. Así, obtenemos el *binomio* $\sqrt{108+10}$ y el *apotome* $\sqrt{108-10}$. Tomamos la raíz cúbica de cada uno de ellos. Substraemos la raíz cúbica del apotome de la raíz cúbica del binomio y obtenemos el valor de x:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Notemos que si $a = \sqrt{108+10}$ y $b = \sqrt{108-10}$, entonces $a - b = 20$; además $ab = 2^3 = 8$. Entonces la solución es de la forma $x = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$[17]. Cardano no alude a las otras raíces de la ecuación, sólo a esta que es la verdadera[18].

Para el caso de *el cubo igual a la primera potencia y un número:* $x^3 = px + q$, Cardano enuncia la siguiente regla:

> *Cuando el cubo de la tercera parte del coeficiente de la primera potencia no es más grande que el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, restas el primero de estos números de este último y agregas la raíz cuadrada de esta resta a la mitad de la constante de la ecuación y, de nuevo, réstalo de la misma mitad, y tendrás, como se dijo, un* binomio *y su* apotome, *la suma de las raíces cúbicas de los cuales constituyen el valor de la raíz.*

Es importante notar aquí la restricción que le impone Cardano: $\left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{q}{2}\right)^2$ La diferencia entre estos términos debe ser no negativa pues es necesario tomar la raíz cuadrada de este número para encontrar la solución. La no

17 Dicho de otra forma: Si $x^3 + px = q$ con $p > 0$ y $q > 0$, para encontrar su solución Cardano utilizó la identidad algebraica: $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$. Si $p = 3ab$ y $q = a^3 - b^3$, entonces la identidad se trasforma en: $(a - b)^3 + p(a - b) = q$ y, por lo tanto, $x = a - b$ será una solución de la cúbica reducida (el coeficiente de x^2 es nulo).

18 Esta raíz es 2 y las otras raíces son: $-1 + 3i$, $-1 - 3i$.

aceptación de los negativos y la falta de sentido para las raíces de números negativos conducen a no poder ver la generalidad de este argumento. Allí está presente el discriminante de la cúbica[19].

En el caso de *el cubo y número igual a la primera potencia*, el matemático del Renacimiento aplica lo explicado en el primer capítulo sobre las trasformadas de ecuaciones: conocer la solución de una ecuación permite conocer la de otra relacionada. En efecto, enuncia su regla afirmando que si $x^3 + q = px + q$, $y^3 = yx + q$, entonces,

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{p - 3\left(\frac{y}{2}\right)^2}.$$

En el capítulo XIIII Cardano introduce la transformación de ecuaciones cúbicas con términos cuadráticos a la forma reducida. Dice: "Si el cubo es igual al cuadrado y constante, se puede introducir un cambio en la ecuación por una del cubo igual a la primera potencia y la constante por el primer método de conversión, el cual es del todo a la parte…" Y enuncia la regla en los casos que le es necesaria; por ejemplo, para el caso *el cubo y el cuadrado iguales a un número*, se puede traducir como:

$$x^3 + px^2 = q, \text{ si } x = y - \frac{p}{3},$$

la ecuación se transforma en $\left(y - \frac{p}{3}\right)^3 + p\left(y - \frac{p}{3}\right)^2 = q$,
entonces, desarrollando y reduciendo términos, tenemos:

$$y^3 = 3\left(\frac{p}{3}\right)^2 y + \left[q - 2\left(\frac{p}{3}\right)^3\right],$$

que se reduce a uno de los casos estudiados[20].

Es importante a este respecto retomar el caso sobre "El cubo y números

[19] Puesto que para $x^3 + px + q = 0$, $(a - b)^3 + p(a - b) = q$

i) Si $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$, entonces a^3 y b^3 son ambas reales y las raíces son:

$$a + b, -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}.\sqrt{-3}, -\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.\sqrt{-3}$$

ii) Si $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$, entonces $a^3 = b^3$, $a = b$ y las raíces son: $2a$, $a(w + w^2)$, $a(w + w^2)$, donde w es la raíz tercera primitiva de la unidad que es obtenida al solucionar en C la ecuación $x^3 = 1$, o sea $2a, -a, -a$.

iii) $2a$, $a(w + w^2)$, $a(w + w^2)$ donde w es la raíz tercera primitiva de la unidad que es obtenida al solucionar en C la ecuación $x^3 = 1$, o sea $2a, -a, -a$.

iv) Si $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$, entonces a^3 y b^3 serían complejos; sus raíces cúbicas también complejas y las raíces de la ecuación son en este caso: $2a$, $-a - b\sqrt{3}$, $-a + b\sqrt{3}$, todas reales.

[20] La regla que da Cardano para resolver este problema, en forma general, es equivalente a: Considerando la ecuación general de tercer grado, $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, se supone $y = x - \frac{a}{3}$

La ecuación tomaría la forma $\left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = 0$, desarrollando obtenemos: $x^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)x + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$. En la cual se ha eliminado el término cuadrático.

igual al cuadrado": $x^3 + q = px^2$, tratado tanto en el primer capítulo como en el XVI. En este último, Cardano da primero la regla y ejemplifica, para después hacer la demostración geométrica de ésta.

En el primer capítulo, Cardano dice: Si el cubo y el cuadrado son iguales a una constante y si el producto de un tercio del coeficiente de x^2 y el cuadrado de los dos tercios del mismo es menor que la constante de la ecuación, x solamente tiene un valor y éste es positivo. Este valor es igual al de las soluciones ficticias en el correspondiente caso de que el cubo y la constante sean iguales al cuadrado con el mismo coeficiente.

Ejemplifica para $x^3 + 3x^2 = 20$ y $x^3 + 20 = 3x^2$.

Lo que tenemos es que si $x^3 + px^2 = q$ $(p > 0, q > 0)$, si $\frac{1}{3}p\left(\frac{2}{3}p\right)^2 < q$, entonces

$$x = +s,\ y + s = -s \text{ en } x^3 + q = px^2.$$

Si el producto de esta multiplicación es igual a la constante, habrá una solución verdadera y dos ficticias y en el otro caso dos verdaderas y una ficticia.

Por ejemplo, en $x^3 + 11x^2 = 72q$ y $x^3 + 72 = 11x^2$.

Al respecto, Bergé (2003) hace referencia a un análisis de Zariski, sobre el trabajo de Cardano, donde éste comenta que al asumir Cardano, a propósito de estas ecuaciones, que hay un número positivo N (en nuestro caso s), de modo tal que si x = N, se tiene que si $x^3 + q < px^2$ (se muestra que bajo la condición $q < \frac{4}{27}p^3$, basta tomar $N = \frac{2}{3}p$). Por otro lado, para x = 0 se tiene $x^3 + q > px^2$ y existen valores suficientemente grandes de x para los que $x^3 + q > px^2$, él deduce, por ejemplo, que existen dos raíces positivas, una entre 0 y N y la otra entre N y un valor grande de x. Cardano hace uso implícitamente de una idea de completitud. Bergé afirma que, según esto, lo que se ve es un uso implícito de lo que hoy se conoce por el teorema de Bolzano.

De acuerdo con la afirmación de Zariski y Bergé (2003), es importante aludir que en el proceso de resolver ecuaciones y en el análisis de su naturaleza, existe en la base una idea de cómo es el conjunto que admite esas raíces, porque recordemos que para el caso de Cardano, numéricamente esos objetos existen (los negativos y los complejos), lo que no admite es la validez de éstos como raíces de ecuaciones. Por lo tanto, hay unas propiedades de esos números que permiten su operatividad y su pertenencia a un conjunto que no sabemos cómo lo caracteriza Cardano. Existen intuiciones respecto a lo que deja apreciar esa operatividad respecto a un caso específico, la solución de ecuaciones.

En total, son 13 casos de la cúbica los que son analizados y resueltos por Cardano, así como también otros casos derivados de ellos.

Recordemos que en el caso de una ecuación cuadrática las soluciones están dadas por una expresión que sólo involucra operaciones aritméticas elementales sobre los coeficientes de la ecuación (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas) y el proceso de esta aplicación se conoce como *resolver la ecuación por medio de radicales*. En el caso de las cúbicas y bicuadráticas, Cardano pretende obtener sus raíces por medio de realizar operaciones aritméticas sobre los coeficientes de una ecuación dada, hecho que logra afirmativamente, como lo hemos anotado.

Es así como considera a sus ecuaciones con coeficientes numéricos concretos como representantes de tipos generales, contempla la solución típica de todas aquellas ecuaciones que se presentan, por ejemplo para el cubo y la cosa igual a un número ($x^3 + px = qx^2$); después de efectuar todo el proceso para el caso concreto, termina dando una fórmula verbal de la regla equivalente a la solución general para las ecuaciones cúbicas que tienen esa forma.

De otra parte, es importante resaltar que la teoría de ecuaciones enmarca problemáticas que no se superan por la constitución de los números reales, dado que sus soluciones desbordan este campo numérico. Lo que permite valorar, más aún, la potencia de abordar enfoques integradores en el estudio de las matemáticas, que integren, por ejemplo, lo numérico y lo algebraico.

Un ejemplo de esta problemática lo aborda Cardano, cuando desarrolla la solución de ecuaciones que tienen la forma *el cubo igual a la primera potencia y número,* que en el caso concreto de la ecuación $x^3 = 15x + 4$, haciendo sus cálculos obtiene que

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano tenía conocimiento acerca de que la raíz cuadrada de un número negativo no existe, pero también sabe que $x = 4$ soluciona la ecuación, por lo tanto no podía entender qué sucedía en este caso con su regla de solución. También se ve enfrentado al problema de las raíces de números negativos que al operarse producen soluciones de ecuaciones que son aceptadas, como en el producto

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 25 - (-15) = 40.$$

A tales expresiones las califica como *verdaderamente sofísticas*.

De esta forma, se evidencia cómo la falta de aceptación y de desarrollo de un concepto más abstracto como es el de los números complejos, hizo que la teoría de Cardano no alcanzara la generalidad que él esperaba y lo condujera a caminos inexplicables y sin una salida de explicación lógica, lo que obstaculizó el desarrollo de nuevas técnicas, puesto que obtener raíces cuadradas de números negativos en la solución implicaba dejar el procedimiento de resolución incompleto, de tal forma que la regla establecida no ofrecía la posibilidad de encontrar la raíz positiva, cuya existencia muchas veces era evidente al comprobarla mediante una simple sustitución en la ecuación.

Sin embargo, es de resaltar que Cardano adopta cierta posición con respecto a las concepciones de la época, pues no se limitó a considerar que ecuaciones que tenían como solución raíces de números negativos o con los mismos números negativos no eran solucionables, como es el caso de las ecuaciones $x^2 + 1 = 0$ y $x + 1 = 0$, y tratar de negar su existencia a toda costa. Cardano presentó aquellas ecuaciones y problemas que conllevaban a obtener, en algunos casos, de un lado raíces de números negativos y del otro un valor real, conflicto que muestra de forma importante, para el desarrollo de las producciones posteriores, cierto grado de interés acerca de estos números y un intento de ruptura ideológica presentando la problemática, aludiendo a no poder entender cuál era el sentido de su regla en tales casos, lo cual, además, lograría despertar un completo interés de los matemáticos posteriores.

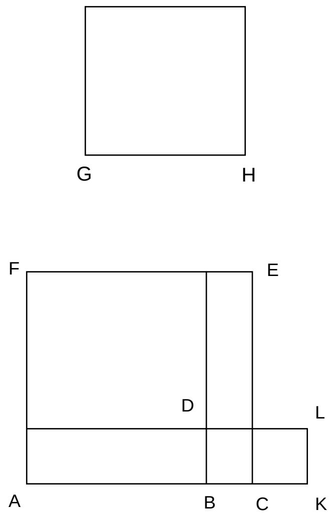
SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LAS REGLAS

Las demostraciones geométricas de Cardano para sus reglas algebraicas, las cuales a pesar de estar basadas en las proposiciones euclidianas presentan algunas excepciones; por ejemplo, en la prueba que hace de la fórmula para la ecuación $\mathrm{x}^3 + 6\mathrm{x} = 20$, es una demostración con "apariencia" geométrica. Cardano basa su razonamiento en la identidad algebraica

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2\, b+3ab^3 +\mathrm{b}^3$$

y usa el siguiente razonamiento:

Si GH^3 más seis veces su lado GH es igual a 20, y si AE y CL son dos cubos cuya diferencia es 20 y tal que el producto de AC, el lado (de uno), y CK, el lado (del otro), es 2, a saber un tercio del coeficiente de x. Haciendo BC igual a CK; así, el resto de la línea AB es igual a GH y por consiguiente el valor de x, para GH ya está dado (x). De acuerdo con la primera proposición del capítulo sexto de este libro, completamos el sólido con DA, DC, DE y DF; y como DC representa BC^3, como DF representa AB^3, DA representa $3(BC\times AB^2)$ y DE representa $3(AB\times BC^2)$. Entonces, $AC\times CK$ es igual a 2 y $AC\times 3CK$ sería igual a 6, el coeficiente de x; por esta razón $AB\times 3(AC\times CK)$ es $6x$ o $6AB$, por lo cual tres veces el producto de AB, BC y AC es $6AB$. Ahora la diferencia entre AC^3 y CK^3 es 20 —evidentemente el mismo BC^3, el cual es igual a esto por suposición—, y desde la primera proposición del capítulo seis está la suma de los cuerpos DA, DE y DF. Por consiguiente, estos tres cuerpos son iguales a 20.



Cardano continúa su demostración asumiendo *BC* negativo.

En este caso Cardano usa la figura solamente como un soporte que brinda elementos intuitivos mediante el gráfico, para representar la fórmula $(u + t)^3$ y facilitar su comprensión, pues de lo contrario se necesitaría una figura tridimensional. Así, se puede deducir que una demostración de este tipo está bajo la influencia geométrica, pero en realidad no alude a una prueba estrictamente geométrica; su compromiso geométrico se refleja con la figura utilizada, el amarre que todavía se presenta para un desarrollo algebraico independiente; sin embargo, hay un intento por hacer una prueba que no dependa estrictamente de los axiomas y proposiciones euclidianas, poniendo en evidencia, en cierta forma, que el álgebra también proveía elementos generales para que posteriormente fuera totalmente independiente de la generalidad de la geometría.

Por otro lado, en el propósito de establecer su teoría general, Cardano se ve nuevamente bloqueado por una noción que obstaculiza su desarrollo, aunque en este caso se podría hablar de un bloqueo parcial. Pues bien, este aspecto tiene que ver con un bloqueo geométrico que puede ser considerado desde tres aspectos: uno de acuerdo con la naturaleza de los objetos matemáticos que considera Cardano, el segundo con la metodología usada y el tercero tiene que ver con sus demostraciones. En cada caso veremos cómo este bloqueo puede ser considerado parcial.

Veamos, Cardano caracteriza explícitamente la naturaleza de los objetos matemáticos con los cuales trabajará, explicando por qué cierra su libro con el tratamiento de las ecuaciones cúbicas, así: *como la posición se refiere a una línea, el cuadrado a una superficie, y el cubo a un cuerpo sólido, seríamos muy torpes si siguiéramos más allá. La naturaleza no lo permite,* con esto podemos establecer cómo Cardano hace explícito su compromiso antológico, conservando la tradición griega al estilo euclidiano, pues cada potencia está relacionada con un objeto geométrico, amarrado a la percepción intuitiva que la naturaleza provee físicamente, por ello la potencia no puede superar el grado 3.

El segundo aspecto tiene que ver con su metodología; aquí nuevamente se ve Cardano influido por las consideraciones ideológicas de los antiguos y de su época, pues todavía el álgebra está lejos de desprenderse de la geometría, donde se consideraba que el cuerpo axiomático euclidiano era el más formal, que permitía dar a las demostraciones ese estatus de validez y generalidad. Así, Cardano establece la formulación verbal de la regla que soluciona la ecuación, procede a realizar su demostración que, además de las proposiciones de Euclides, usaba diagramas y letras.

También se aprecia que su método sigue cierta influencia de al-Khwarizmi relacionada con un razonamiento geométrico, de manera que él busca, por ejemplo, resolver la ecuación "completando el cubo", sin embargo se podría decir que su método está estrechamente relacionado con la concepción de la validez de las pruebas geométricas, pero a pesar de esto Cardano se preocupa es por una teoría de reglas generales para las ecuaciones en términos de un álgebra que aunque es retórica y algo sincopada, es su eje central. La geometría se constituye en un obstáculo parcial, ya que de acuerdo con ello Cardano se limita, mas no termina siendo su objeto de estudio central, además recordemos que a pesar de que las figuras geométricas euclidianas no permiten representar una expresión de dimensión mayor que 3, Cardano incluyó en su libro ecuaciones de cuarto, quinto y sexto grado.

Sin embargo, Cardano no es del todo fiel a este compromiso, pues a pesar de hacer esta aclaración, presenta la solución desarrollada por Ferrari para la ecuación cuártica, y se dice que su libro retoma multitud de ecuaciones de cuarto, quinto y sexto grado; por lo tanto, el compromiso ontológico se pone, en cierta forma, en duda, pues no limita los resultados de su libro solamente a la ecuación cúbica.

Álgebra y objetivación en Cardano

En el trabajo de Cardano se puede apreciar que éste hace explícito su compromiso ontológico, conservando la tradición griega al estilo euclidiano, amarrado a la percepción intuitiva que la naturaleza provee físicamente. De esta manera, para Cardano, la potencia no puede superar el grado tres y no acepta el uso de cantidades negativas. Teniendo en cuenta estas concepciones de Cardano podemos decir que, para él, los objetos algebraicos deben ser construidos lógicamente a partir de otros objetos definidos con anterioridad; o sea que, como éste conservaba la tradición euclidiana, tendía al enfoque de lo construido.

Los postulados de Euclides no constituyen un sistema axiomático en el sentido moderno, sino que, sobre todo, estipulan los medios de construcción de figuras admitidos (fundamentalmente la idea de geometría con regla y compás, de rectas y de círculos). Quizá podría decirse que el único axioma en el sentido moderno es precisamente el quinto, el de las paralelas. La deducción de Euclides no es sólo obtención de consecuencias lógicas, sino que tales consecuencias se basan en la elaboración de construcciones con los medios admitidos; de esta manera podemos decir que Cardano constituye los objetos algebraicos en su teoría desde un enfoque constructivista, en su metodología se ve que el álgebra está lejos de desprenderse de la geometría, donde él considera que el cuerpo axiomático euclidiano es el más formal, que permite dar a las demostraciones estatus de validez y generalidad.

Ante esto, podemos decir que la concepción de los objetos algebraicos en Cardano se ve enfrentada a un conflicto ontológico, sus creencias se enfrentan con “descubrimientos” matemáticos no explicables bajo su realidad. Cardano descubre que es posible trabajar y encontrar soluciones a ecuaciones de grado cuarto, rechazaba las raíces negativas a pesar de saber que la ecuación que estaba resolviendo tenía solución y la conocía. Tal vez no se puede afirmar que Cardano “invento” los números negativos, pero sí los descubrió en un mundo en el que no podía darles una explicación lógica, dado que la manera como éste concibe los objetos matemáticos no se lo permite, de esta manera podemos decir que limitar una teoría simplemente a la adecuación de la realidad física desde lo constructivo puede generar obstáculos en esta. Así, es importante tener en cuenta el aspecto ideológico en una producción científica.

De esta manera, el trabajo de Cardano hizo varios intentos por despejar caminos complicados y sin salida, que aportarían elementos de mucho interés —y que se deberían tener en cuenta— para el desarrollo de las matemáticas, posteriormente.

Los comentarios que hemos hecho y los ejemplos que hemos revisado de este libro, son relevantes; sin embargo, para darnos una idea mejor sobre la gran contribución de Cardano al desarrollo del álgebra, comentaremos algunos otros que merecen atención especial.

Cardano se ve, entonces, enfrentado a fuertes concepciones ideológicas que bloquean su intento de generalidad, por lo que se puede decir que sí logra establecer reglas generales de solución (con las limitaciones del sistema numérico existente), pero para una serie de casos específicos de ecuaciones de un mismo tipo (cuadráticas, cúbicas y cuárticas), cada una vista como una clase de problema diferente, lo cual se encuentra muy lejos de alcanzar la generalidad que se perseguía; además, hoy por hoy, con una sola ecuación basta para representar todos los casos posibles de un mismo tipo de ecuación; por ejemplo, así ocurre con la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. No quiero decir con ello que el trabajo de Cardano no fuese relevante; por el contrario, su texto fue muy famoso por haber dado allí solución a dos de los problemas antiguos fundamentales, los cuales eran resolver ecuaciones cúbicas y cuárticas, además a esto se le deben agregar las adversidades ideológicas y concepciones con las que tuvo que lidiar Cardano y con las que entró en contradicción, teniendo en cuenta también la falta de un desarrollo más amplio del simbolismo, pues él no contaba con símbolos generales para los coeficientes, variables, raíces, etc., mucho menos contaba con la multitud de generalizaciones y unificaciones económicas con las que hoy contamos nosotros, y que no por ello se puede decir que el álgebra ha llegado a su cumbre, puede avanzar y no sabemos si dentro de una década, o un siglo, las matemáticas de ahora se consideren obsoletas.

Conclusiones y reflexiones pedagógicas

De esta manera, podemos finalizar observando que los objetos algebraicos en la consolidación de la teoría de ecuaciones, desde la mirada del álgebra árabe y el álgebra renacentista, tienen su fundamento a través del proceso de actividad del hombre en su cultura. Se relaciona mucho con las ideologías pertinentes de cada época, pero nos deja ver además el problema fundamental en el campo de la historia y la filosofía de la matemática y es el que tiene que ver con el tipo de realidad y existencia de la que gozan estos objetos matemáticos, dado que pensar el álgebra simplemente como una construcción del hombre para responderse a los problemas cotidianos, deja muy corto lo que significa este campo de conocimiento; tampoco podemos decir que estos objetos algebraicos son entes independientes del hombre, regidos por unas relaciones y condiciones universales, en realidad no estamos en condiciones de determinar la manera como estos objetos existen, esto quedará como interrogante, pero sí podemos concluir que estos elementos apoyados en recursos geométricos y en la realidad física son la base de la teoría general de ecuaciones de nuestra actualidad; por ende, es pertinente que en la formación de docentes se reflexione y se conozca sobre ellos, pues esto proporciona grandes elementos didácticos para el momento de enseñar y consolidar estos objetos en la escuela.

En ese proceso de constitución de objetos matemáticos de la teoría de ecuaciones, tratados en estos apartados, nos dejan ver cómo un sistema matemático de signos que posibilite la designación de las propiedades de los objetos que se van constituyendo, es fundamental. Tanto en al-Khwarizmi, como en Cardano, aun en un ámbito retórico y sincopado, se hace necesaria la especificidad de ciertos términos, que demarcan significaciones específicas, se toman términos del lenguaje natural que especifican objetos en la teoría. Este hecho es fundamental que los maestros lo tengan en cuenta, pues permite, de una parte, valorar la ganancia de contar con un sistema matemático de signos, como el actual, que no sólo posibilita la determinación exacta de la propiedad fundamental de los objetos matemáticos, sino su operatividad precisa. Además, reconocer que el proceso de construcción escolar de objetos matemáticos va acompañado de la pareja: contenido-representación de objeto.

Además, una reflexión, deducible de este trabajo, alude a la importancia de reconocer en los estudios epistemológicos, la potencia de tratamientos integradores a la hora de abordar los estudios históricos, es decir, que el campo numérico ha determinado las técnicas de solución de ecuaciones, la caracterización de los objetos mismos del álgebra, los niveles de generalidad de éstos, entre otros aspectos, y, a la vez, la teoría algebraica ha puesto en blanco y negro los objetos numéricos, por ejemplo su corporación a un campo teórico. Dicho de otra forma, un significado de las raíces de ecuaciones no está por fuera del campo de variación de éstas, como más adelante se verá (por ejemplo, en el capítulo que se refiere a la obra de Descartes); como teoría de ecuaciones y teoría de curvas se consolidan para la comprensión de esa característica fundamental de $\mathbb{R}$, la completitud y la continuidad.

Por lo tanto, desde la perspectiva didáctica, es importante reconocer que en la introducción de los objetos matemáticos en la escuela se debe privilegiar la construcción de campos amplios de significación fenomenológica, un campo semítico rico de situaciones, fenómenos y problemas matematizables y organizados por el objeto en cuestión, que lleve a potenciar la determinación de las características fundamentales de este objeto y su construcción lógica, en una teoría matemática, lo cual es posible a través de un sistema que lo viabilice. Los aspectos semánticos no pueden estar por fuera de los sintácticos y viceversa.

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, M. y Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta.* Santafé de Bogotá. Editorial Universidad Nacional.

Bergé, A. Sessa, C. (2003). *Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 6, Núm. 3, pp. 163 -197. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México, DF.

Cardano, G. (1993). *Ars Magna or The Rules of Algebra.* Translated and Edited by T. Richard Witmer. New York, Dover Publications, Inc.

Charbonneau, L. (1996). From Euclides to Descartes: Algebra and its relation to geometry. En: *Approaches to Algebra.* Printed in Netherlands, Bednarz et al. (eds). Kluwer Academics Publisher. pp. 15-38.

Puig, L. (1998). *Componentes de una historia del álgebra.* El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Detartament de Didáctica de la Matemática. pp. 109-131. Ed. Hitt, F., Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En: *Rico*, ed. La Educación Matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: ICE/Horsori.

Rashed, R. (1984). L'idée de l'algèbre chez al-Kwārizmī. En: *Entre Arithmétique et algèbre. Recherches sur L'Histoire des Mathématiques arabes.* Chapitre I: Les commencements de l'algèbre. Société d'édition. Les Belles Lettres. Paris.

Rosen, F. (1986). *The algebra of Mohammed Ben Musa.* London. Oriental Translation Fund.

Vasco, C. E. (1983). *El álgebra renacentista.* 2ª Edición. Santafé de Bogotá, Empresa Editorial Universidad Nacional.

Capítulo 4

EL PAPEL DE LA TÉCNICA ALGEBRAICA CARTESIANA EN LOS PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DE LOS REALES

María Rocío Malagón Patiño[1]
Luz Edith Valoyes Chávez[2]

Introducción

En este capítulo proponemos dos hipótesis en relación con los aportes del álgebra al proceso de objetivación de $\mathbb{R}$. En primer lugar, interpretamos el álgebra histórica y epistemológicamente como una técnica matemática cuyo uso en el proceso de estudio y solución de problemas de distinta naturaleza genera lo que algunos investigadores han denominado "procesos de algebrización de las matemáticas"; sólo los desarrollos matemáticos e históricos posteriores de esta técnica conducirán a su constitución como una disciplina matemática denominada álgebra moderna. En segundo lugar, planteamos que tal proceso de algebrización posibilita una ampliación de las problemáticas matemáticas, en tanto que además de la reconstrucción de algunos conocimientos matemáticos, se generan cuestiones nuevas imposibles de plantear en el contexto anterior a este proceso.

Desde un punto de vista histórico, encontramos en la obra de Descartes un momento de madurez importante en el proceso de consolidación de esta técnica[3] gracias a los artificios que introduce, y que le permite resol-

1 Egresada de la maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.
2 Egresada de la maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.
3 En adelante nos referiremos a ésta como la técnica algebraica cartesiana.

ver, además del Problema de Pappus, dos de los problemas clásicos de las matemáticas: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Así pues, para desarrollar las dos hipótesis planteadas, mostraremos la forma como la algebrización de la geometría, llevada a cabo por Descartes, posibilita la reconstrucción de una noción matemática clave como la de curva, y en el caso de $\mathbb{R}$, consolida una nueva manera de entender la relación entre número y magnitud, fundamental en su constitución como objeto matemático. Además, mostraremos la emergencia de nuevas cuestiones imposibles de plantear en el contexto de la geometría anterior a este matemático y filósofo francés.

En la primera parte discutiremos aquello que hemos denominado "algebrización de la geometría" utilizando la propuesta de Gardies (2001) relativa a la objetivación en matemáticas, para analizar las características ontológicas que adquieren las cónicas.

En la segunda parte analizaremos la que consideramos la principal ganancia obtenida en el trabajo cartesiano en cuanto a $\mathbb{R}$ debido a esta algebrización del campo geométrico, y que se traduce fundamentalmente en la posibilidad del doble "uso" del número para "explicar" tanto el orden como la medida, que en *La Geometría* significa que todos los problemas relacionados con ésta última se reducen al orden. Finalizaremos con algunas consideraciones acerca del número contenidas en la obra filosófica cartesiana que nos pueden ayudar a comprender los desarrollos matemáticos en cuanto a este objeto.

La algebrización de la geometría

En el único texto matemático cartesiano, *La Geometría*, Descartes propone y desarrolla una técnica matemática para resolver problemas geométricos cuya potencia se expresa al hacer posible la solución de algunos de los problemas clásicos irresolubles con las técnicas comunes de su época: La trisección del ángulo, la duplicación del cubo y el denominado Problema de Pappus. Este último, que consistía fundamentalmente en encontrar el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a un número determinado de rectas dadas en posición se encuentran en una razón dada, parece remontarse hasta la época de Euclides, aunque sólo encuentra una solución parcial en el trabajo de Apolonio de Perga que contiene los primeros tratamientos completos para tres y cuatro rectas.

Descartes replantea este problema para *n* número de líneas, introduciendo en el Libro I de *La Geometría* una técnica que consiste esencialmente en:

1. Suponer el problema resuelto.
2. Designar las líneas involucradas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.

3. Identificar la relación de dependencia que existe entre las distintas líneas designadas.
4. Encontrar la ecuación que expresa de dos maneras distintas una misma relación entre las líneas.
5. Resolver la ecuación. Los requerimientos del problema están determinados por la posibilidad y condiciones de solución de la ecuación.

Los cinco elementos anteriores, constitutivos de la técnica algebraica cartesiana son muy simples en apariencia, pero cada uno de ellos introduce una serie de consideraciones conceptuales importantes que en conjunto, transformarían, en adelante, no sólo el proceso de estudio y solución de los problemas geométricos, sino de cualquier tipo de problema; en este sentido, lo que cambia de manera radical es la forma de llevar a cabo la actividad matemática e introduce una forma particular de constituir objetos geométricos.

En los siguientes párrafos mostraremos la aplicación de la técnica algebraica cartesiana en la solución al Problema de Pappus realizada en los libros I y II de *La Geometría,* para explicitar las especificidades que adquieren el método de análisis y el simbolismo algebraico en el desarrollo de esta técnica, y que conducirán a una "nueva manera de hacer matemáticas" (Bolea, Bosch y Gascón, 2001), a la algebrización de las matemáticas.

La técnica cartesiana en la solución del Problema de Pappus

Uno de los problemas clásicos de las matemáticas y que tuvo sólo una solución parcial con las técnicas y teorías previas a Descartes fue el denominado ***Problema de Pappus***. Tal como lo expresó Apolonio en su obra *"Conics"*, éste consistía en encontrar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a tres o cuatro rectas dadas, de las cuales se conoce su posición y los ángulos que éstas forman con las proyecciones hacia ellas del punto que representa el lugar geométrico, se encuentran en una razón dada. En *La Geometría,* el problema se enuncia de la siguiente manera:

Sean *AB*, *AD*, *EF* y *GH*, etc., varias líneas dadas, debe encontrarse un punto, como *C*, del cual trazando otras líneas a las dadas, como *CB*, *CD*, *CF* y *CH*, de manera que los ángulos *CBA*, *CDA*, *CFE* y *CHG*, etc., sean dados, y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otra proporción dada, lo que no hace, en modo alguno, más difícil el problema.

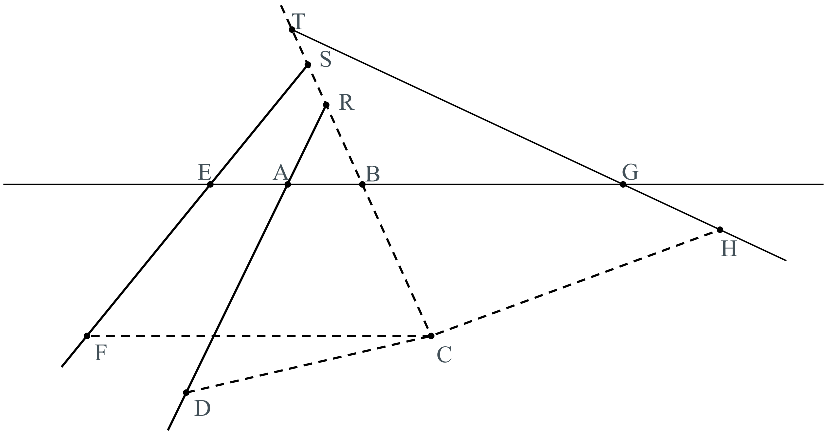


***Figura 1.* Problema de Pappus.**

(Fuente: *La Geometría***)**

Pappus de Alejandría encontró que para tres o cuatro rectas el lugar geométrico buscado era una cónica (parábola, hipérbola o elipse) y propuso una generalización de este problema para un número de rectas entre cuatro y seis, puesto que para un número mayor no tenía sentido, debido a que desde Euclides, el producto de dos rectas era una superficie y el de tres un paralelepípedo, pero el de cuatro escapa al imaginario matemático para los estudiosos de la época, tal como lo escribe Descartes aludiendo al tratamiento dado por los griegos:

> Si fueran más de seis rectas, ya no puede decirse que se da la relación entre un objeto comprendido por cuatro rectas y otro formado por las tres, pues no hay nada que esté formado por más de tres dimensiones (Descartes, 1947, p. 61).

La presentación que hace Descartes del problema trasciende la dimensionalidad griega llevándolo hasta un número cualquiera de líneas, lo cual es posible por la estructura algebraica con que ha dotado a las operaciones con segmentos, en particular por la propiedad de cerradura que cumple ahora su multiplicación[4]:

> Dadas tres, cuatro o más rectas, se trata de encontrar un punto del que se puedan trazar otras tantas líneas rectas una sobre cada una de las dadas, y haciendo con ellas ángulos dados, y que el rectángulo formado por dos de esas así trazadas desde el punto, tenga una proporción dada con el cuadrado

[4] En Descartes se da una redefinición de la multiplicación de segmentos: el producto de *n* segmentos es un nuevo segmento, posible gracias al ingreso de un segmento unidad. Este progreso cartesiano será presentado en la segunda parte de este capítulo.

> de la tercera, si no hay más que tres; o bien con el rectángulo de las otras dos, si hubiere cuatro; o bien si hay cinco que el paralelepípedo comprendido por tres tenga la proporción dada con el paralelepípedo formado por las dos que restan y por otra línea dada, o bien si hay seis que el paralelepípedo formado por tres tenga una proporción dada con el paralelepípedo de las otras tres; o bien si hay siete que lo que se produce multiplicando cuatro la una por la otra, tenga la razón dada con lo que se produce con la multiplicación de las otras tres y además por otra línea dada; o si hay ocho, que el producto de la multiplicación de cuatro tenga la proporción dada con el producto de las otras cuatro. Y así este problema se puede extender a todo número de líneas. (Descartes, 1947, p. 63).

En el proceso resolutivo del problema, identificamos que el primer elemento que constituye la técnica algebraica cartesiana alude a la característica definitoria del método de análisis para la solución de problemas: suponer que el problema se encuentra resuelto. Uno de los cambios que se expresa en Descartes en relación con este método, consiste en la exigencia de la existencia previa de una estructura algebraica para los segmentos, que han sido escogidos para representar a todas las demás magnitudes y cuya construcción ha sido posible por la introducción del elemento neutro para la multiplicación: el segmento unidad, sin el cual sería imposible el planteamiento de la relación proporcional para las *n* líneas. Lo anterior permite que a través de una serie de deducciones se llegue a una formulación que se reconoce como verdadera que, como veremos en este caso, se traduce en una ecuación que representa el problema. Descartes asume la existencia de un punto *C* que satisface los requerimientos del problema y toma las cuatro líneas dadas en posición *AB*, *AD*, *EF* y *GH*, desde las cuales se trazan las líneas *CB*, *CH*, *CF* y *CD* de manera que los ángulos *CBA*, *CDA*, *CFE* y *CHG* sean dados. Sin perder generalidad, es posible suponer que el producto de dos de ellas es igual al producto de las otras dos:

$$CB \times CH = CD \times CF.$$

Evidentemente, uno de los elementos esenciales para comprender la obra matemática cartesiana es la influencia que sobre ella tuvieron tres disciplinas: la Lógica, el Análisis de los griegos y el Álgebra de los modernos. En la técnica cartesiana se retoma el clásico método heurístico de los griegos: El método de análisis y síntesis, cuya caracterización se encuentra en una de las traducciones de los textos de Pappus[5] y en el que se plantean dos modalidades: la teorética y la problemática. La primera iba dirigida a la búsqueda de la verdad, mientras que la otra se dirigía a encontrar aquello que se requería. Surge, de esta manera, una primera diferencia con el método

[5] Aunque aparecía ya en el Libro XIII de los *Elementos* de Euclides.

analítico cartesiano, debido a que éste es utilizado como un modo de razonamiento exclusivo para la resolución de problemas. Además, su carácter *puramente intelectual* lo independiza de la consideración y representación figural en el proceso resolutivo, ubicándolo, en términos de la construcción de conocimiento, en el terreno del entendimiento puro, de la "razón cartesiana" y no de la imaginación, logrando resolver problemas que el método clásico no hace.

En este mismo sentido, aunque Descartes retoma de los griegos la modalidad de *lo dado,* el análisis cartesiano no es regresivo y no termina en su exposición sino en una formulación que constituye una ecuación, expresión del problema. Así, pues, *lo dado* en la obra cartesiana se relaciona con la existencia previa de una estructura algebraica para los segmentos, con las consecuencias que ya hemos mencionado: la posibilidad del planteamiento de la relación proporcional entre las longitudes de los segmentos que pone en juego en los procesos de construcción de los problemas geométricos expuestos.

El segundo elemento constitutivo de la técnica algebraica cartesiana sustentado en lo que Descartes denominó "el álgebra de los modernos", se refiere al uso del simbolismo algebraico para representar no sólo las magnitudes desconocidas sino también las conocidas; esta posibilidad, históricamente propuesta por Vieta e instrumentalizada por Descartes, además de la consabida ganancia operatoria, se traduce en ganancia ontológica, debido a que la designación de todos los elementos involucrados en el problema a través de los literales hace posible el reconocimiento de las relaciones de dependencia entre ellos, de la forma que ésta toma, sin importar los objetos involucrados, de tal manera que dichas relaciones podrán ser consideradas en adelante como objetos matemáticos en sí mismas.

La utilización de los literales en el sentido descrito, que otorga el mismo estatus operatorio a los parámetros y a las incógnitas[6], hace posible la configuración de los problemas estudiados en *tipos* de problemas organizados alrededor de una estructura común representable y manipulable a través del simbolismo algebraico. La eventualidad de resolver *todos* los tipos de problema encuentra su mejor expresión en este uso *particular* de las letras, en tanto que remite a la posibilidad de encontrar sistemáticamente estructuras o formas únicas que los representen; el uso metódico de la técnica algebraica cartesiana es, en este sentido, una de las vías de entrada al mundo de las estructuras en el cual las relaciones entre los objetos matemáticos, sus dependencias mutuas y propiedades están en primer lugar.

En el proceso resolutivo del Problema de Pappus, Descartes designa como x al segmento de la línea AB comprendido entre los puntos A y B y

6 En Bolea (2001, p. 266), se caracteriza esta relación entre los parámetros y las incógnitas en términos de "considerar los primeros como objetos conocidos que se manipulan como si fueran desconocidos, y las segundas como objetos desconocidos que se manipulan como si fueran conocidos".

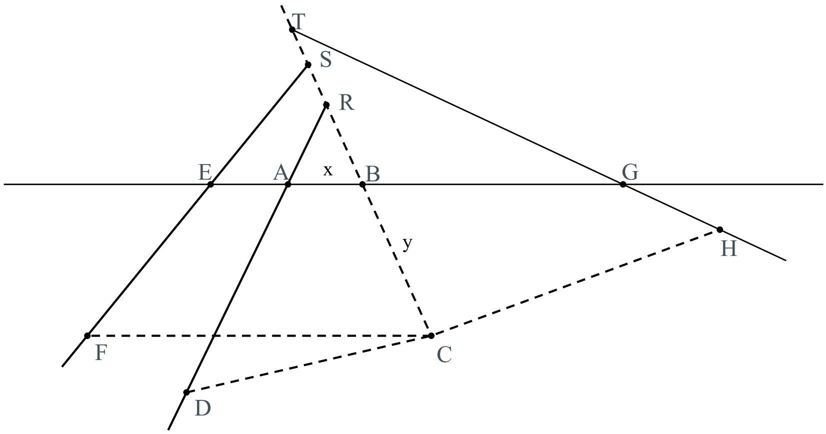


Figura 2. Determinación de ejes de referencia para el problema de Pappus.
(**Fuente:** *La Geometría).*

como *y* a *CB*, prolongando todas las demás líneas hasta que corten a estas dos también prolongadas, si es necesario y si no le son paralelas, generándose cortes de la línea *AB* en los puntos *E* y *G* y de la línea *CB* en los puntos *R*, *S* y *T*. Así, pues, se ha establecido un sistema referencial no necesariamente ortogonal en el cual (x, y) representan las coordenadas de *C***.** La solución del problema incluye, de esta forma, encontrar todos los puntos (x, y) que constituyen la curva.

Entonces, la designación mediante el simbolismo algebraico de las magnitudes involucradas en el problema representa para Descartes una "economía de pensamiento", ya que puede abandonar —aunque momentáneamente— el campo geométrico y proceder en el sintáctico algebraico, lo que nos permite concluir que dicha designación no sólo es nominalística sino fundamentalmente operatoria. Lo anterior se evidencia en *La Geometría*, en donde Descartes afirma que:

> Pero a menudo no hay necesidad de trazar esas líneas sobre el papel y basta con designarlas por ciertas letras, una sola para cada línea. Así, para sumar la línea BD a la GH, designo a la una *a* y a la otra *b* y escribo $a + b$; y $a – b$ para restar *b* de *a*; y *ab* para multiplicar la una por la otra [...] (Descartes, 1947, p. 52)

La identificación de las relaciones entre las magnitudes involucradas en el problema, tercer elemento constitutivo de la técnica algebraica cartesiana, procede por la vía de la comparación entre sus longitudes mediante el establecimiento de proporciones entre ellas, condición que finalmente conducirá a la formulación de la o las ecuaciones que representan el problema.

En el caso del problema de Pappus, como todos los ángulos del triángulo *ABR*[7] son dados, la proporción que hay entre los lados *AB* y *BR* es también dada, lo que es indicado por Descartes como de *z* a *b*:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$$

De manera que como *AB* es igual a *x*, *BR* se puede escribir como $\frac{bx}{z}$ y la línea total *CR* será:

$$CR = y + \frac{bx}{z}$$

pues el punto *B* se encuentra entre *C* y *R*[8].

Análogamente, los tres ángulos del triángulo *DRC* son dados y por consiguiente, también la proporción que hay entre los lados *CR* y *CD*, que Descartes indica como de **z** a **c**, de modo que siendo $CR = y + \frac{bx}{z}$, entonces:

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$$

$$CD = \frac{c.CR}{z}$$

$$CR = c.\left(\frac{y + \frac{bx}{z}}{z}\right)$$

$$CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$$

Para hallar *CF*, Descartes procede de la siguiente manera:

Trabaja con el triángulo *ESB*; como los **ángulos** son dados, la razón $\frac{EB}{BS}$ es dada lo que le permite encontrar la longitud de *CS* en función de *y*, y de *BS*. Luego, trabaja con el triángulo *FCS*; nuevamente los **ángulos** son dados, por tanto la razón $\frac{CS}{CF}$ es dada y puede obtener *CF*.

Y para hallar *CH*, Descartes procede nuevamente como sigue:

Trabaja con el triángulo *BGT*; los ángulos son dados, luego la razón $\frac{BG}{BT}$ es dada y puede hallar la longitud de *CT* en función de *BT*. Luego, trabaja con el triángulo *TCH*; los **ángulos** son dados, la razón $\frac{CT}{CH}$ es dada y por lo tanto puede obtener *CH*.

7 Todos los tratamientos están referidos a la Figura 2.

8 De la misma forma procede cuando *R* se encuentra entre *C* y *B* o *C* entre *B* y *R*

En este punto, Descartes anunciaba:

> Se ve así que cualquiera sea el número de líneas dadas, todas las líneas trazadas desde C que forman ángulos dados, conforme al enunciado, se pueden siempre expresar, por tres términos de los que uno está compuesto por la cantidad desconocida y multiplicada o dividida por alguna otra conocida, y la otra, de la cantidad desconocida x, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida y la tercera, de una cantidad dada conocida. Se exceptúa el caso de que ellas sean paralelas (Descartes, 1947, p. 68).

Recogiendo en lenguaje moderno lo expresado por Descartes para las longitudes de los segmentos encontrados, tenemos que:

$$CH = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$$

$$CD = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$$

$$CF = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3$$

$$CB = y$$

De esta manera quedan explícitas las relaciones entre formas geométricas (magnitudes geométricas, longitudes de segmentos) y formas algebraicas (expresiones afines). Cada longitud ha sido expresada en una forma algebraica afín $\alpha x + \beta y = \gamma$, con α, β y γ parámetros que van a jugar un papel fundamental en la determinación de las clases de solución (el tipo de cónica que soluciona cada caso). Como consecuencia de esta asociación, la representación literal usada le permitió encontrar las relaciones entre las magnitudes del problema.

El cuarto elemento constitutivo de la técnica algebraica cartesiana, consistente en representar mediante una ecuación que expresa de dos maneras distintas una misma relación entre las líneas, sólo es posible al suponer que el punto *C* satisface el problema, lo que justificaría la escritura de la igualdad. Además, para determinar el punto *C* no hay más que una sola condición requerida, a saber, que el producto de la multiplicación de un cierto número de líneas (en este caso dos) sea igual o tenga la proporción dada al producto de la multiplicación de las otras:

$$CB \times CH = CD \times CF$$

Pero, para cada una de estas longitudes en el paso anterior se habían encontrado expresiones algebraicas afines[9], de tal manera que la expresión anterior es equivalente a:

[9] En realidad, Descartes nunca usó expresiones como "*formas afines*" aunque la cita realizada en el paso anterior permite esta "traducción" en lenguaje moderno.

$$y.(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) = (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3).(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$$

Descartes puede ahora encontrar una ecuación donde las cantidades están representando a las longitudes de los segmentos a partir de la relación de proporcionalidad que toma la forma moderna de una ecuación cuadrática:

$$Ax^2 + Bxy + Cx + Dy + Ey^2 + F$$

Un aspecto importante para complementar y que conecta con el paso siguiente lo constituye la determinación del grado de la ecuación resultante para un número cualquiera de líneas; al respecto afirma:

> Además, se ve también que multiplicando varias de estas líneas la una por las otras; las cantidades **x** y **y** que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya. De modo que ellas no tendrán nunca más de dos dimensiones cuando no se trate más que de la multiplicación de dos líneas; ni más de tres cuando no se trate más que del producto de tres; y así al infinito (Descartes, 1947, p. 69).

Por lo tanto, Descartes sabía que si el problema involucraba cuatro líneas, la ecuación resultante sería de segundo grado. El último elemento constitutivo de la técnica algebraica cartesiana lo lleva a determinar la posibilidad de existencia de las raíces de esta ecuación y por lo tanto las condiciones de solución como una forma de dar cuenta de los requerimientos del problema. Tal y como afirma en *La Geometría*, "…Y así se podrá encontrar la cantidad **x** con la regla y el compás de la manera ya explicada…" (Descartes, 1947, p. 69)

Se requiere entonces resolver la ecuación, puesto que la construcción del problema, es decir, la posibilidad que éste sea resoluble, depende a su vez de la existencia de raíces para la ecuación que lo representa. Es importante tener en cuenta que, tal como lo expone en el Libro III, las raíces de la ecuación que son solución de algún problema geométrico conservan este referente, es decir, representan longitudes de segmentos construibles, en principio, con regla y compás.

Por otra parte, tal como se expresa en la cita y dado que la ecuación obtenida en el problema de Pappus es una ecuación cuadrática, Descartes sugiere acudir a las técnicas geométricas descritas en el inicio del Libro I de *La Geometría*. A renglón seguido, y continuando con el procedimiento de solución, afirma:

> Lo mismo, tomando sucesivamente infinitas diversas magnitudes para la línea **y**, se encontrarán también infinitas para la línea **x**; y así se tendrá una infinidad de diversos puntos, análogos al **C**, por medio de los cuales se trazará la línea curva pedida (Descartes, 1947, p. 70).

La eventualidad de escoger una de las dos cantidades involucradas (y, por ejemplo), asignarle un valor y encontrar el valor de x a partir de la solución de una ecuación de segundo grado, utilizando para ello procedimientos que ya han sido explicados en la primera parte de su obra[10], acentúa la relación de dependencia entre las cantidades. Así, cuando Descartes asume la cantidad **y** como conocida, la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bxy + Cx + Dy + Ey^2 + F$ toma la forma de la ecuación de segundo grado en x, $x^2 = \pm ax \pm b^2$, generándose por esta vía una serie de puntos que darán como resultado la curva que se busca. La importancia de este paso es evidente; antes que encontrar el valor de una incógnita, de una cantidad desconocida, se pretende hallar su valor que *depende* del valor que otra ha tomado; se trata, entonces de acuerdo con Álvarez (2000), de "determinar el valor que esta cantidad pueda tomar *en función* del valor asignado a la otra cantidad" (p. 50).

Tal como planteamos en párrafos anteriores, Descartes no necesita exhibir el proceso de resolución de la ecuación cuadrática, puesto que al inicio del Libro I ha mostrado ya la técnica para su solución; simplemente procede a la reescritura de los coeficientes de manera conveniente, presentando la forma general de las raíces como:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \sigma x - \frac{p}{mxx}}$$

Tomando como referente esta expresión y haciendo uso de una articulación entre parámetros e incógnitas, opera con la estructura de la solución y por lo tanto no sólo la encuentra: determina además si hay solución, si es única, qué tipo de solución es e incluso qué características o propiedades posee esta solución.

Para conseguirlo, su tratamiento se basa en nuevas construcciones sobre las ya hechas, tal como lo muestra la siguiente figura:

Con estas construcciones auxiliares y haciendo uso de nuevo de razones proporcionales, se encuentra que trazando IL de modo que la línea IK es a KL como z es a N y siendo $IK = x$, se obtiene: $\frac{IK}{KL} = \frac{z}{N}$, lo que le permite establecer que $BL = m - \frac{xN}{z}$

Hallando por medios análogos la proporción que hay entre KL e IL se tiene que: $\frac{KL}{IL} = \frac{N}{A}$

Lo que le permite establecer que: $IL = x\frac{A}{z}$

Descartes garantiza de esta manera que el punto K esté entre L y C. Finalmente, habiendo hecho la construcción de tal manera que la longitud BK sea igual a m, $BL = n - KL$, de donde obtiene que: $BL = m - \frac{xN}{z}$

10 Específicamente para este tipo de ecuaciones, propone las técnicas geométricas de la regla y el compás.

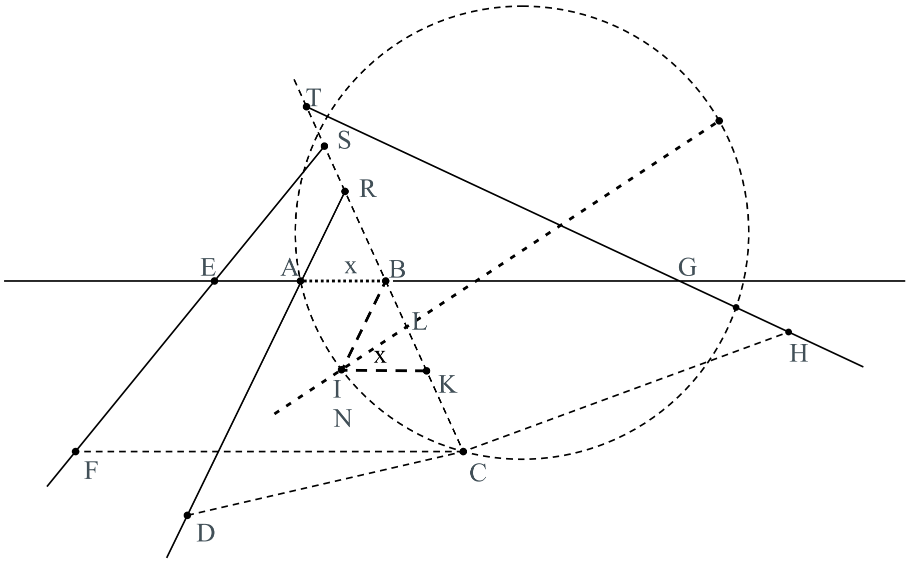


Figura 3.
(Fuente: *La Geometría)*

Y teniendo $CB = BL + LC$, para quien ya tenía la expresión algebraica:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \sigma x - \frac{p}{mxx}}$$

por comparación queda que: $LC = \sqrt{mm + \ \sigma x - \frac{P}{m}xx}$

La expresión radical indica si la solución es una parábola, una elipse o una hipérbola, de acuerdo con el criterio del discriminante, esto es:

1. Si $\frac{p}{m}$ $xx = 0$, entonces la curva es una parábola,

2. Si $\frac{p}{m}$ $xx > 0$, entonces la curva es una hipérbola, y

3. Si $\frac{p}{m}$ $xx < 0$, entonces la curva es una elipse.

En esta raíz Descartes expresa *todas* las cónicas que son solución del problema, lo que significa que éstas pueden definirse como los lugares geométricos de puntos del plano que cumplen ciertas condiciones, y no sólo como secciones de una figura tridimensional en corte con un plano, definición propia de los geómetras griegos.

La algebrización de la geometría y una nueva forma de constitución de objetos geométricos en la obra cartesiana

A partir de la construcción realizada por Descartes hasta este momento, afirmamos que se ha producido una algebrización de la geometría en tanto que, en primer lugar, **ha identificado su estructura global** y la ha representado mediante el simbolismo algebraico en la forma de la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bxy + Cx * Dy + Ey^2 + F = 0$, posibilitando su manipulación sintáctica y la obtención de nuevos conocimientos relativos a ésta, tal y como se evidencia, por ejemplo, en la manera de caracterizar las cónicas. Este proceso de identificación se encuentra mediado por el uso sistemático e indistinto de los parámetros y de las incógnitas, logrando la unificación de los problemas y la posibilidad de tratar con tipos generales de éstos.

Mediante este procedimiento y dada la naturaleza de los problemas abordados, Descartes obtiene una nueva clasificación de las curvas y un nuevo tratamiento sobre ellas. Recordemos que para los griegos los problemas geométricos se podían clasificar en lineales, planos y sólidos, de acuerdo con los procesos constructivos y con las curvas requeridas para su solución. Los problemas planos podían ser construidos sólo con regla y compás, en este caso las curvas demandadas eran circunferencias y rectas[11]; los problemas sólidos requerían de secciones cónicas y los lineales de curvas más complejas. Existían además las llamadas curvas mecánicas como la concoide, la espiral, la cuadratriz y la cisoide, entre otras.

Amparado en la primacía del razonamiento sobre la precisión de las construcciones mecánicas, Descartes congregaría las curvas en sólo dos tipos: las geométricas y las mecánicas, presentando varios criterios para esta clasificación: cinemática o de movimiento continuo, uso de instrumentos y trazo punto a punto; pero es mediante la posibilidad de asociación de curvas con ecuaciones donde se presenta la mayor riqueza y que es de mayor trascendencia. En general, las curvas geométricas se caracterizaron a través de una única ecuación algebraica en x e y de la forma $P(x, y) = 0$, mientras que las demás eran mecánicas, superando con esta consideración el clásico criterio griego de la constructibilidad como principio para determinar la existencia legítima de este tipo de curvas.

Bajo este último criterio clasificó las curvas geométricas en "géneros" según el grado de la ecuación: en las de primer género estarían las curvas más simples, es decir, la circunferencia y las cónicas que se harían corresponder con ecuaciones de segundo grado; las de segundo género se relacio-

11 Para los griegos, el criterio para considerar una curva como geométrica era la posibilidad de construirla con regla o compás, por lo tanto, las únicas que estaban en esta categoría eran los círculos y las rectas. De allí que Descartes lo que hizo fue extender este campo e ingresar otras dentro de esa categoría.

nan con ecuaciones de tercer y cuarto grado; las de tercer género corresponden a ecuaciones del quinto o sexto grado y así, sucesivamente. Desde esta perspectiva, dada una curva es posible encontrar una ecuación algebraica que le corresponda y de allí deducir el género al cual pertenece.

En segundo lugar, encuentra una **técnica única** que permite resolver este tipo de problemas, y un discurso tecnológico que da cuenta de las características de los problemas. Esta **unificación técnica y tecnológica** consiste en, tal y como lo plantean Bolea, Bosch y Gascón (2001). "…una reducción drástica de los instrumentos escritos (formalismos) con los que se representan y manipulan los problemas, las técnicas y los componentes del discurso tecnológico teórico (nociones, conceptos, definiciones y teoremas)" (p. 269). Pero, además, le permite justificar y controlar el alcance de las técnicas sintéticas, otorgándoles el preciso lugar que les corresponde en cuanto a los problemas geométricos resolubles con ellas, y ubicando, de paso, el lugar geométrico en donde se encuentra la solución obtenible mediante dichas técnicas, como lo muestra la Tabla 1.

Tabla 1

Número de líneas	Técnica	Los puntos buscados se encuentran en...
3, 4, 5 líneas	Regla y compás	Una de las tres secciones cónicas o en la circunferencia de un círculo o en una línea recta.
5 (si todas ellas son paralelas), 6, 7, 8 o 9 líneas	Intersección de dos lugares planos.	En las líneas que son de un grado más compuesto que las secciones cónicas.
9 (si todas ellas son paralelas), 10, 11, 12 o 13 líneas	Intersección de un lugar plano y una cónica.	En las líneas que son de un grado más compuesto que las precedentes.
13 (si todas ellas son paralelas), 14, 15, 16, o 17 líneas	Será necesario emplear una línea curva de grado aún más compuesto que la precedente.	En las líneas que son de un grado más compuesto que las precedentes.

En tercer lugar, además de encontrar todas las soluciones del Problema de Pappus, Descartes describirá en el Libro III las características de las soluciones de las ecuaciones que permiten resolver los tipos de problemas planteados y las condiciones de existencia de dichas soluciones, y no se contentará con encontrar soluciones aisladas, generando una nueva problemática a nivel tecnológico, en tanto que debido a la obtención de ecuaciones para resolver los problemas geométricos, puede cuestionar el tipo de soluciones, las características de las raíces, su estructura, la relación entre coeficientes y raíces, etc., y por lo tanto la **emergencia de nuevos problemas** que no son ya los planteados inicialmente, como el caso de construcción de las tangentes a curvas. En cuarto lugar, hace posible la **emergencia de las relaciones entre cantidades variables, y en particular, las funcionales como un nuevo tipo de objetos matemáticos.** Al referirse a los modos de constitución de objetos matemáticos, Gardies propone una categoría filosófica denominada *Tematización*[12] como un tipo de generalización que no procede por la vía de la extensión de sus propiedades sino mediante su caracterización a través de una propiedad que surge de una relación sobre la clase anterior. En el caso de las Secciones Cónicas, identifica un cambio sustancial en el objeto en tanto que tal, desde los trabajos matemáticos de Euclides y Apolonio hasta los de Descartes y Fermat, afirmando que en este proceso se han producido generalizaciones, de las cuales, a diferencia de las demás, la última es una Tematización, tal y como lo expresa en el siguiente párrafo:

> Quand on passe du III^e siècle avant J.C., époque d'Archimède puis d'Apollonius, à notre siècle, on s'aperçoit que la notion de *section conique* a fait l'objet successivement de ce que je proposerai d'appeler certaines généralisations, puis d'une thématisation, deux formes que le terme vague d'abstraction risque de nous faire confondre l'une avec l'autre, bien qu'elles soient irréductibles l'une à l'autre. (Gardies, 2001a, p. 118).

Las primeras generalizaciones son realizadas por Apolonio para el caso del cono y de la Sección Cónica. En la definición 18 del libro XI de los *Elementos*, Euclides define el cono y enuncia algunas de sus propiedades:

> Cuando un lado del ángulo recto de un triángulo rectángulo permanece fijo y el triángulo gira a su alrededor hasta volver a la posición de la que empezó a girar, la figura formada es un cono. Si la recta que permanece fija es igual al lado del ángulo recto que gira, el cono es rectángulo; si es menor, obtusángulo y si es mayor, acutángulo.

Surge de esta definición como propiedad esencial del cono la de ser una superficie generada por la rotación de 360º de un triángulo rectángulo con base perpendicular al eje de rotación, de tal manera que el ángulo en su vértice determinará el tipo de cono, producto de la relación entre el cateto que gira y la recta que permanece fija. La naturaleza de las Secciones Cónicas estará determinada por cada uno de éstos al ser cortados por un plano nor-

---

12 Gardies retoma esta palabra de la obra *Sur la logique et la théorie de la science* de Cavaillés, aunque menciona que el verbo "Tematizar" fue empleado por Le Robert para referirse al hecho de "poseer una cosa como objeto de la actividad mental" (Gardies, 2001b, pp. 11-18).

mal a la generatriz: la elipse se obtiene como sección del cono acutángulo, la parábola como sección del cono rectángulo y una rama de la hipérbola como sección del cono obtusángulo, dependiendo de esta forma del objeto geométrico (los conos rectos) y de los cortes ortogonales; existe, por lo tanto, una invarianza determinada por el concepto de "lo recto", constituyendo de esta manera el concepto central en la definición.

Apolonio, por su parte, establece en sus primeras definiciones en *Conics* las correspondientes a las Secciones Cónicas:

> Si desde un punto se conecta una línea recta a una circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano del punto, y la línea se extiende en ambas direcciones, y si en el punto que permanece fijo se rota la línea alrededor de la circunferencia de tal manera que regrese al mismo lugar desde donde partió, entonces a la superficie generada compuesta de dos superficies que yacen verticalmente opuestas una a la otra, cada una de ellas incrementándose indefinidamente así como la línea recta que las genera, la denomino *superficie cónica*, y denomino al punto fijo vértice, y la línea recta dibujada desde el vértice al centro del círculo eje (Apolonio, 2000, p. 3).

Y al cono:

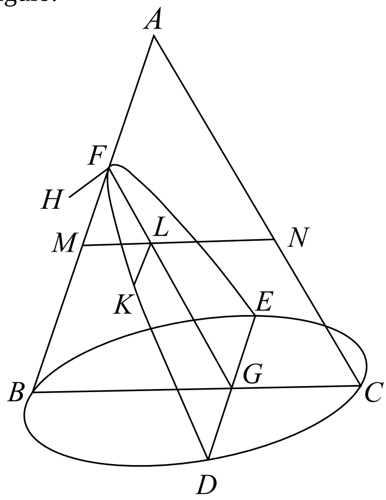
> Y la figura comprendida por el círculo y por la superficie cónica entre el vértice y la circunferencia del círculo la denomino un cono, y al punto que es además el vértice de la superficie vértice del cono, y a la línea recta dibujada desde el vértice al centro del cono eje, y al círculo base del cono (Apolonio, 2000, p. 3).

El cono, de esta manera, aunque está ligado a una rotación de una línea recta cualquiera, hace parte de una noción *más general*, la de superficie cónica, en la que "lo recto" constituye sólo un caso particular dando paso a la oblicuidad del eje, como lo establece en la definición 3: "Denomino conos rectos a aquellos que tienen ejes perpendiculares a sus bases y oblícuos a aquellos que no tienen ejes perpendiculares a sus bases".

En relación con las Secciones Cónicas, afirma Gardies que "…telle que nous la connaissons, supposait une seconde *généralisation*, entiérement distincte de la précédente. Cette seconde *généralisation* ne concerne plus la notion de *cône*, mais celle de section (Gardies, 2001b, p. 119). En la proposición 11 del Libro I de las *Conics,* Apolonio establece que:

> Si se corta un cono con un plano a través de su eje, y si se corta también con otro plano que corta la base del cono según una línea recta perpendicular a la base del triángulo Axial, y si además el diámetro de la sección se hace paralelo a un lado del triángulo Axial, cualquier línea recta trazada desde la sección del cono paralela a la sección común del plano que corta y la base del cono hasta el diámetro de la sección, tendrá su cuadrado igual al rectán-

> gulo limitado por la porción de diámetro que comprende en la dirección del vértice de la sección y otra línea recta cualquiera; esta línea recta tendrá la misma razón a la porción abarcada entre el ángulo del cono y el vértice del segmento como el cuadrado en la base del triángulo axial al rectángulo limitado por los dos lados restantes del triángulo.



Apolonio denomina A al vértice y corta al cono con un plano a través de su eje, de tal manera que se obtiene el triángulo ABC. En seguida, lo corta nuevamente por la base, de tal manera que la línea DE es perpendicular al BC, obteniéndose la línea DFE cuyo diámetro FG es paralelo a AC. Además, dibuja FH desde F perpendicular a FG, supone que

$$\frac{BC^2}{BA \times AC} = \frac{FH}{FA}$$

y toma un punto K cualquiera sobre la línea DFE dibujando KL paralelo a DE. Así, Apolonio va a demostrar que

$$KL^2 = FH \times FL$$

y denominará como parábola a la sección obtenida.

Los discursos teóricos que fundamentan la demostración del teorema se encuentran básicamente en la obra euclidiana y en la teoría pitagórica de la aplicación de áreas, de tal manera que la parábola depende de las propiedades geométricas derivadas del corte del cono por el plano y la Superficie Cónica, y de las relaciones proporcionales que es posible establecer entre los triángulos semejantes formados por los segmentos comprometidos en los tratamientos. Un aspecto relevante de la presentación de la parábola, es que al ser identificada la propiedad fundamental ésta resulta en una condición central para estudiar la curva por métodos planimétricos basados en dicha propiedad.

Las Secciones Cónicas no son necesariamente ahora perpendiculares a la generatriz, los ejes como los cortes no son forzosamente rectos y de un mismo cono pueden obtenerse los tres tipos de Cónicas. Es importante anotar que Apolonio enuncia la propiedad característica del objeto parábola sujeta a la relación entre segmentos y cantidades y en seguida lo designa, lo que significa que la definición no se hace sino después que ha enunciado como teorema la propiedad del lugar geométrico. En este aspecto, considera Gardies “le mérite majeur des *Coniques* d’Apollonius” (Gardies, 2001b, p. 120) debido a que es justamente sobre esta generalización que se llevará a cabo lo que él denomina Tematización.

A diferencia de las generalizaciones expresadas en la extensión de un concepto, la *Tematización* en matemáticas consistirá entonces en "erigir como objeto autónomo[13] aquello que para los griegos sólo era una propiedad distintiva del objeto geométrico" (Gardies, 2001a, p. 120). Esta propiedad distintiva del objeto que, expresada por Descartes mediante el simbolismo algebraico, posibilita la sustitución de la realidad geométrica de la parábola y las dependencias generadas por las representaciones figurales, surge entonces como objeto matemático en sí mismo del cual se pueden realizar predicaciones en cuanto a sus propiedades algebraicas.

Descartes expresa analíticamente las Cónicas a partir de una relación entre cantidades variables, que puede llegar a ser **"funcional"**, lo que le permite con esta expresión realizar operaciones como la comparación entre ellas, los condicionamientos de coeficientes o parámetros, las traslaciones en los ejes, entre otras. Como resultado de la asociación entre curvas y ecuaciones algebraicas expuesta por Descartes, la parábola puede ser definida como los puntos del plano que cumplen la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado de la ordenada $\boldsymbol{y}$ es exactamente igual al producto de la abscisa $\mathbf{x}$ y el parámetro $\boldsymbol{l}$ (llamado *lado recto)* y cuya expresión analítica es $\boldsymbol{y^2 = l}\,\mathbf{x}$. Sin perder el referente geométrico, las Cónicas en Descartes y en particular la parábola en la obra cartesiana, habitan en un mundo algebraico, de naturaleza analítica, y a su vez hacen parte de una expresión más general: la ecuación de segundo grado.

El uso de la técnica algebraica cartesiana ha permitido, de esta manera, avanzar en una forma distinta de definir y caracterizar las cónicas como relaciones entre dos cantidades variables, y sobre la cual se pueden realizar predicaciones que resaltan su carácter algebraico.

Evidentemente, el modelo algebraico "cartesiano" tiene como principal característica la de constituir una "máquina" que produce nuevos conocimientos relativos al campo de problemas geométricos de distancias de puntos a rectas, generando además cuestiones que le plantean nuevos retos al matemático. Aún así, en la obra matemática cartesiana se evidencia un ir y venir entre el mundo de las formas geométricas y de las formas algebraicas, manteniendo la necesidad de traducir los resultados del tratamiento algebraico a la exhibición geométrica de la curva correspondiente, lo cual implica que la resolución del problema no termina en la solución o soluciones de la ecuación que lo representa: es necesario asignarle un sentido geométrico, transformando los hallazgos (las raíces de la ecuación) en la construcción de lo realmente buscado: *Un lugar geométrico,* que resuelve los problemas de

13 En el caso de las cónicas se trata de la función, definida más tarde por Leibniz.

las distancias de puntos a rectas dadas en posición, relacionando curvas con ecuaciones algebraicas y, por lo tanto, desprendiendo sus razonamientos de los contextos geométricos, ubicándolos en los tratamientos algebraicos. Las relaciones proporcionales para él no son igualdades entre magnitudes geométricas determinadas, constantes y dadas sino entre longitudes variables y por lo tanto no necesariamente conocidas, expresadas a través de ecuaciones, tal y como lo enuncia en los últimos renglones del enunciado: "[...] pero, a causa de que hay siempre una infinidad de diversos puntos que pueden satisfacer lo que aquí se pide, se requiere también conocer y trazar la línea sobre la cual deben todos ellos encontrarse" (Descartes, 1947, p. 63).

Es justamente en este contexto de la algebrización de la geometría en que, entendemos, se produce el principal aporte cartesiano a la constitución de $\mathbb{R}$ como objeto matemático.

Una aproximación al número real en el trabajo cartesiano: la relación entre número y magnitud

La algebrización de la geometría, tal y como la hemos planteado en el apartado anterior, nos ha permitido mostrar la manera como el modelo algebraico obtenido en el proceso de solución del Problema de Pappus, conduce, entre otros aspectos, a la unificación de su tratamiento matemático; gracias a la representación de tal modelo en ecuaciones mediante los artificios del simbolismo algebraico, posibilitará que Descartes se ocupe de analizar algunas de sus características a través del tratamiento matemático de sus raíces, siempre con un propósito muy específico: la solución de problemas geométricos.

El análisis desarrollado en *La Geometría* confirma que la eventualidad de que un "ente" sea número en el trabajo cartesiano se encuentra íntimamente ligado a su posibilidad de representación a través de los segmentos, entendiendo que éstos a su vez son la representación abstracta de las magnitudes geométricas, tal y como se plantea en las *Regulæ*[14]. Un primer acercamiento al Libro III nos ilusiona acerca de la existencia de una "abstracción" de esta identificación. Pero a medida que nos adentramos en su estudio nos queda claro que el tratamiento algebraico sobre las raíces de las ecuaciones tiene como finalidad simplificar en lo posible la solución de los problemas geométricos estudiados y, por lo tanto, su significado es claramente el de longitudes de segmentos.

Las relaciones entre el discurso cartesiano acerca del número en sus escritos filosóficos como las *Reglas* o el *Discurso del Método* y su funcionamiento en el proceso de encontrar soluciones a los problemas geométricos

---

[14] Reglas para la dirección del espíritu, que designaremos simplemente como *Reglas* (Descartes, 2003).

propuestos en *La Geometría,* tienen sus matices. En el primero de estos textos, por ejemplo, Descartes explícitamente afirma que los coeficientes que se representan a través de "signos numéricos" (Descartes, 2003, Regla XV, p. 175) en las ecuaciones explican la multitud de las cantidades desconocidas y las cantidades conocidas, lo que sugiere, en principio, que está tratando con $\mathbb{Z}$. Pero en *La Geometría*, encontramos algunas ecuaciones que parecieran no ajustarse a esta exigencia.

En este contexto planteamos que la principal ganancia que se obtiene en Descartes en cuanto al uso de la técnica algebraica cartesiana en el proceso de solución de problemas geométricos, tal y como lo hemos presentado en este documento, se traduce en la posibilidad del doble uso del número para "explicar" tanto el orden como la medida, que en *La Geometría* significa que todos los problemas relacionados con esta última se reducen al orden.

Tomando como referente estos planteamientos, en la primera parte de este apartado analizaremos la manera como funcionan los números en la solución de problemas en *La Geometría;* en la segunda parte, consideraremos las reflexiones que Descartes realiza al respecto en su obra filosófica.

Las ecuaciones en *La Geometría*: un medio para resolver problemas geométricos

El Libro III de *La Geometría* contiene una serie de afirmaciones acerca de las raíces de las ecuaciones y de las relaciones entre éstas y los coeficientes, cuyo propósito claramente planteado por Descartes es construir los problemas geométricos mediante el género de curvas más simple, de acuerdo con la naturaleza de dichos problemas. En total son 20 resultados que serán utilizados para construir la solución de algunos problemas, entre los que se encuentra la trisección del ángulo, irresoluble hasta el momento con las técnicas matemáticas disponibles. Veamos algunas en las cuales se hacen evidentes consideraciones acerca de la naturaleza del número.

Cuáles son las raíces falsas

Las cantidades negativas, aceptadas como raíces de las ecuaciones, deben representarse por segmentos de acuerdo con el imaginario cartesiano. ¿Cómo resuelve Descartes esta situación? Primero, asume que estas cantidades son "menores que cero" (Descartes, 1947, p. 145), introduciendo de esta manera una orientación a los segmentos en relación con un punto dado. Las cantidades negativas adquieren así un carácter *relativo* a la posición de un punto que se toma como referencia, de forma que no existen cantidades de esta clase *per se*. En segundo lugar también introduce un significado sintáctico operatorio, al afirmar "si x designa el defecto de una cantidad, que si es 5, se tendrá $x + 5 = 0$". Las cantidades negativas serán los inversos aditivos de las cantidades positivas, adquiriendo no sólo un carácter geométrico, sino además algebraico.

Cómo se reducen los números quebrados de una ecuación a números enteros

Apelando siempre al principio de simplicidad, en esta regla Descartes muestra un procedimiento para lograr que los números involucrados en una ecuación, es decir, los coeficientes de las cantidades desconocidas y las cantidades conocidas sean enteros[15]. Para construir un problema, si las cantidades involucradas son racionales o irracionales, deben en tanto sea posible reducirse a esta clase de números, que serían los más simples, mediante la operatoria que él propone o "ya por otros diversos modos que son bastante fáciles de encontrar" (Descartes, 1947, p. 159).

En el caso de $x^3-\sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, reduce los coeficientes a racionales y luego a enteros mediante dos cambios sucesivos de variable, procedimiento que además involucra el campo numérico en el cual son posibles las soluciones de las ecuaciones. Así, por ejemplo, en el primer caso, al hacer $y = x\sqrt{3}$ y obtener la ecuación $y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$, luego suponer que $z = 3y$ y obtener $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$, Descartes ha afectado el campo numérico en el cual cada una de estas ecuaciones tiene solución, pasando de los irracionales a los racionales y finalmente a los enteros, respectivamente.

Resaltemos dos elementos. En primer lugar, encontramos como coeficientes cantidades que no siempre muestran, como en este caso, "la multitud" de las cantidades desconocidas, tal y como afirma Descartes en sus *Reglas* (Descartes, 2003, Regla XV, p. 175). $\sqrt{3}$, por ejemplo, que emerge del proceso de estudio de un problema geométrico, y en este sentido representa la longitud de un segmento, evidentemente ya no es la multiplicidad del cuadrado de la cantidad desconocida. Aunque en la ecuación planteada los coeficientes pueden reducirse a enteros, no siempre será así. En segundo lugar, y a pesar de que Descartes no lo hace, la operatoria desplegada para llevar a cabo este proceso muestra el nivel alcanzado en términos del conocimiento de las "propiedades algebraicas" de esta clase de números, que desde una perspectiva contemporánea, son los algebraicos sobre $\mathbb{Q}[x]$[16]. En principio, el tipo de ecuaciones que hacen parte de la obra cartesiana conducen a raíces que son construibles con regla y compás; si suponemos que α y β son dos de estas raíces, tenemos que $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ y α/β con $\beta \neq 0$ son también construibles y tienen estructura algebraica de campo al contener

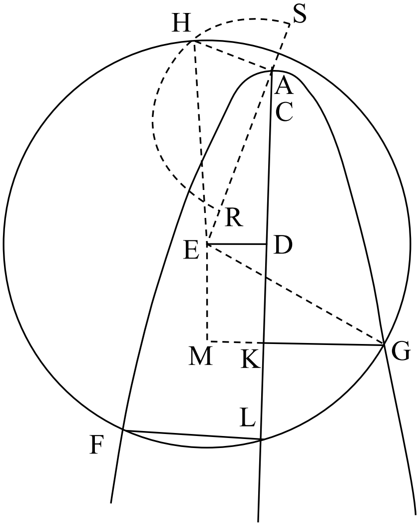
15 Debemos recordar que para Descartes los números enteros son innatos.

16 Las ecuaciones que representan los problemas en *La Geometría* tienen la característica de pertenecer a $\mathbb{Q}[x]$, lo que implica que sus soluciones son los números algebraicos sobre este campo de polinomios, excluyéndose de este universo numérico los irracionales trascendentes.

también a la unidad[17]. Pero, además, en el caso de la trisección del ángulo, cuya ecuación correspondiente es de tercer grado e irreductible sobre $\mathbb{Q}[x]$, tiene como característica que su solución conduce a un tipo de "entes" que no necesariamente son construibles con regla y compás. Evidentemente, estas preocupaciones no habitan en Descartes o, al menos, no se encuentran explicitadas en su obra.

Que las raíces, tanto verdaderas como falsas, pueden ser reales o imaginarias

La exigencia cartesiana de la representación figural del número mediante los segmentos es un condicionante para su existencia; el mejor ejemplo de lo anterior se expresa en esta regla, en donde los imaginarios, a pesar de ser aceptados como raíces de las ecuaciones, quedan excluidos del universo numérico, ya que, de acuerdo con Descartes, "no hay a veces ninguna cantidad que corresponda a las que se imagina" (Descartes, 1947, p. 158). Así, estos números no sólo no pueden representarse mediante segmentos, sino que, en términos de la operatoria introducida por este matemático, no pueden reducirse a números reales. Estas limitaciones se traducen además en la imposibilidad de resolver los problemas geométricos cuyas ecuaciones conduzcan a raíces imaginarias, debido a que "no podrá(n) de ninguna manera ser construido(s) a causa de que las cantidades dadas (imaginarias) no pueden combinarse" (Descartes, 1947, p. 165). Para mostrar la utilidad de estos resultados, Descartes presenta una manera general para construir los problemas sólidos mediante una ecuación de tercer o cuarto grado utilizando para ello la intersección de una parábola y una circunferencia o una recta, técnica que le permite encontrar las raíces de dicha ecuación. Así procede en el siguiente ejemplo planteado antes de ocuparse de la solución del problema de la trisección del ángulo.



En primer lugar, el problema es representado por una ecuación reducida de la forma $z^4 = \pm apz^2 \pm a^2qz \pm a^3r$, o por una equivalente del tipo $z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r$ si se toma la cantidad a como la unidad, o por $z^3 = \pm pz \pm q$ en caso de que r sea 0. Descartes supone que la parábola correspondiente es dada; la cons-

17 Desde una perspectiva contemporánea, el conjunto $\mathbb{K}$ de los números construibles con regla y compás forman un subcampo de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ es una extensión algebraica de $\mathbb{K}$.

trucción de las raíces de la ecuación se producirá gracias a la intersección de dicha parábola con una circunferencia que debe ser encontrada teniendo en cuenta para ello los coeficientes de la cantidad desconocida *p*, *q* y el término independiente *r*. Consideremos el caso cuando *r* es negativo.

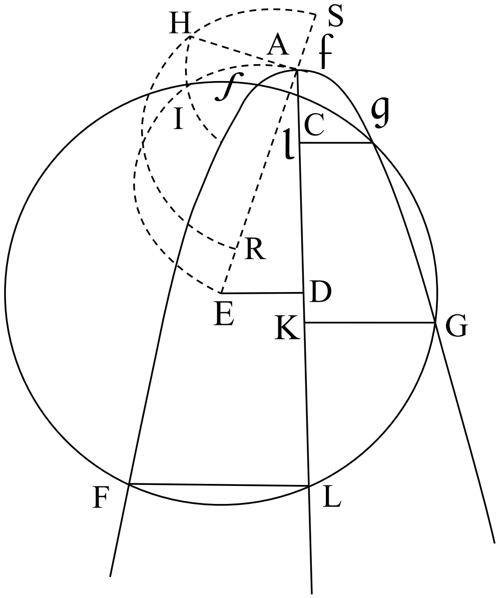
Los elementos de la parábola considerados son la línea *AL* en su eje, el punto *A* como su vértice, el lado recto como la unidad o *a*, lo que implica que la ecuación toma la forma $z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r$, y finalmente toma *AC* igual a la mitad del lado recto, es decir, $AC = \frac{1}{2}$ y $CD = \frac{1}{2}p$. La ubicación de este punto *D* depende además del signo de *p*: si *p* es positivo, habría que ubicarlo en el mismo lado en que está *C*; si es negativo, del lado contrario.

El centro *E* de la circunferencia buscada está determinado por *p* y *q*, ya que se encuentra ubicado a una distancia $\frac{1}{2}q$ de *D*, que a su vez se halla a $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$ del vértice de la parábola.

De esta manera, conocemos la longitud de la línea *EA* que permitirá encontrar el segundo punto para trazar la circunferencia buscada.

Se prolonga *EA* en *AR* con longitud *r* y en *AS* igual a la unidad. Con diámetro *RS* trazamos una circunferencia de la cual *AH* es media proporcional entre AR y *AS*, lo cual permite construir la circunferencia *FGH*.

En seguida encontramos un punto *I* tal que *AH* = *AI*, en donde *I* es el punto que nos permite construir la circunferencia buscada *FGI* y que toca a la parábola en 1, 2, 3 o 4 puntos; los segmentos perpendiculares desde estos puntos a los ejes, representan las raíces de las ecuaciones, tal y como nos muestra la gráfica.



Así, los segmentos *FL***,** *KG***,** *lg* son las raíces reales de la ecuación y será el signo de *q*, es decir, su ubicación, el que determine el signo de estas raíces. Así, si *q* es positivo, serán positivas las raíces que se encuentren del mismo lado que *E*, como *FL*; si por el contrario, *q* es negativa, serán positivas las que se encuentren en el lado contrario de *E*.

Cuando no se produce la intersección entre la circunferencia y la parábola, las raíces de la ecuación, que no podrían representarse a través de segmentos, son imaginarias y de acuerdo con las consideraciones anteriores, el problema no podrá ser construido.

En todo este proceso Descartes ha usado los resultados mostrados en la primera parte del Libro III ratificando que su interés en el tratamiento de las ecuaciones y sus raíces es totalmente utilitario: le permitirán resolver problemas geométricos. Tanto las raíces de las ecuaciones como las demás cantidades involucradas en ellos poseen un referente geométrico, ya que se representan mediante segmentos orientados; pero además, el simbolismo algebraico mediante el cual se expresan sus longitudes, posibilita su manipulación sintáctica otorgando el nivel de generalidad propia a este tipo de tratamientos y la independencia operatoria que resalta las propiedades algebraicas de los números involucrados. En este sentido, una característica definitoria de los números reales[18], en *La Geometría,* es que expresan la medida en el sentido introducido por Descartes en las *Reglas:*

> Por dimensión entendemos el modo y razón según los que un sujeto es considerado mensurable: de modo que no sean sólo las dimensiones del cuerpo la longitud, la anchura y la profundidad, sino también la gravedad sea la dimensión, según la cual los sujetos son pesados [...] Pues la división misma en varias partes iguales, ya sea real o mental, es propiamente la dimensión según la cual numeramos las cosas; y aquella medida que constituye al número dícese con propiedad que es una especie de dimensión, aun cuando haya alguna diferencia en el significado del nombre. Ya que si consideramos las partes en su orden al todo, se dice entonces que numeramos; si por el contrario, consideramos al todo como distribuido en sus partes, medimos aquel [...] (Descartes, 2003, Regla XIV, p. 167).

El número en la obra filosófica cartesiana

Hemos tratado de mostrar en el apartado previo la manera como funciona el número en *La Geometría.* Para complementar lo anterior, analizaremos las principales consideraciones cartesianas al respecto, tal y como se encuentran en sus escritos filosóficos, particularmente en el *Discurso del Método* y en las *Reglas,* en donde creemos juegan un papel importante dos elementos: en primer lugar la introducción de un segmento como unidad de medida, que posibilita establecer una correspondencia operatoria entre los números y las magnitudes y por tanto su doble uso para "explicar" el orden y la medida, logrando que las proporciones involucradas en un problema conduzcan a la ecuación que permite resolverlo. En segundo lugar, el papel que asigna Descartes al entendimiento y a la imaginación en la comprensión del número y que se traduce en su representación tanto figural como literal, para alcanzar la generalidad pretendida en la solución de los problemas geométricos. Son estos dos aspectos los que desarrollaremos a continuación.

[18] Recordemos que están excluidos los irracionales trascendentes.

El "doble uso" del número

Al principio de su *Geometría,* al explicar la manera como la aritmética se relaciona con las operaciones en geometría, Descartes afirmaba que:

> [...] así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto de las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas, que agregarles o quitarles otras, o bien, teniendo una que llamaré **la unidad para relacionarla lo más posible con los números,** y que ordinariamente puede ser tomada a discreción, [...] (Descartes, 1947, p. 49).

De esta manera, los problemas de la medida se reducen al orden mediante la introducción de un segmento unidad, totalmente arbitrario, que actuará no sólo como medida común de los segmentos involucrados en una dificultad, sino que además fungirá como el elemento neutro de la multiplicación. Descartes considera éste como el mayor aporte de su "arte":

> Debe saberse también que las magnitudes continuas, gracias a la unidad empleada, pueden todas ellas, en ocasiones, ser reducidas a la multitud, y siempre al menos en parte; y que la multitud de unidades puede posteriormente disponerse en un orden tal que la dificultad que atañía al conocimiento de la medida dependa finalmente de la inspección del sólo orden y que este progreso reside la mayor ayuda del arte. (Descartes, 2003, Regla XIV, p. 171).

Así, la diferencia entre el orden y la medida está marcada por el ingreso de un tercero. En el orden cada una de las partes se refiere a otras por sí solas, no mediante un tercero de tal forma que es posible "conocer el orden" entre *A* y *B* sin considerar ninguna otra cosa excepto uno y otro extremo. A diferencia de lo anterior, en la medida es posible conocer el orden entre *A* y *B* pero no la proporción de magnitud entre ellos, a no ser que se considere un tercero, *la unidad*.

Lo anterior constituye una de las formas de presentación de la correspondencia entre número y magnitud geométrica que este autor exhibe; de hecho, al ingresar la longitud unitaria y aseverar que: "… o bien teniendo una, que llamaré la unidad para relacionarla lo más posible con los números, y que ordinariamente puede ser tomada a discreción…" (Descartes, 1947, p. 49), hace posible más adelante establecer la correspondencia entre las operaciones con magnitudes geométricas y las operaciones sobre los números reales, es decir, dotar de una estructura algebraica a las operaciones con segmentos.

Evidentemente, la escogencia de los segmentos como la representación abstracta de las magnitudes geométricas no es caprichosa. En ella, de acuerdo con Álvarez (2000), es determinante la posibilidad de usar la proposición VI.12 de los *Elementos* como un artificio para redefinir la multiplicación y resolver el problema de la homogeneidad entre magnitudes. Es, pues, un elemento básico en el tratamiento que hace tanto de la relación de proporcionalidad entre magnitudes geométricas como en la estructuración de las ecuaciones dentro de la construcción de problemas.

En la obra cartesiana, el producto de dos segmentos será un nuevo segmento, generándose, de acuerdo con Álvarez "no sólo la linealización del producto sino su aritmetización" (Álvarez, 2000, p. 71). De aquí que sea posible hablar del producto de un número de segmentos o líneas en términos de otro segmento y no de una figura geométrica con una determinada dimensionalidad como en el caso euclidiano. Así, tomando el segmento *u* como la unidad y dos segmentos *A* y *B*, el producto *C* de ellos se encuentra a partir de la siguiente proporción: $\frac{u}{A} = \frac{B}{C}$

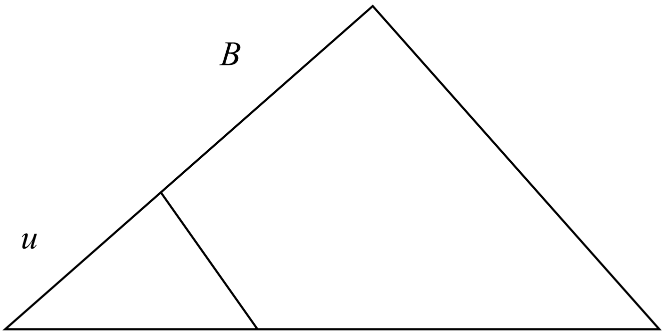


Figura 4.
(Fuente: *Descartes, lector de Euclides).*

Y aunque en la "demostración" cartesiana, esta proporción aparece acompañada de una gráfica que remite al teorema de Thales, indicando que se trata de encontrar la cuarta proporcional entre *u, A* y *B,* es el recurso operatorio que representa lo que será tenido en cuenta en *La Geometría*, de tal manera que expresiones como z^2, z^3 o z^4 son (longitudes de) segmentos.

Al no existir diferencia entre comparar por orden o comparar por medida, dado que el tercer término necesario para la segunda comparación es ya dado para todos (la unidad), es posible entender entonces cualquier proporción como una relación con respecto al orden y corresponderse con una ecuación. Esto significa que una proporción como *u: A :: B: C* podrá ser escrita como *a.b = c*, con *a*, *b* y *c* como longitudes de segmentos no necesariamente constantes o determinados. Como afirma en las *Reglas*:

> Se debe señalar que las comparaciones sólo se llaman simples y claras cuando lo buscado y lo dado participan igualmente de cierta naturaleza; y que las demás comparaciones no necesitan preparación por ninguna otra causa que porque aquella naturaleza común no está de manera igual en las dos, sino

> según ciertos respectos y proporciones en que está envuelta; y que la parte principal de la industria humana no consiste sino en reducir estas proporciones, de modo que se vea claramente la igualdad entre lo buscado y algo que sea conocido.
> Se ha de señalar después que a esta igualdad no puede reducirse sino lo que admite un más y un menos, y que todo ello es abarcado con el nombre de magnitud (Descartes, 2003, Regla XIV, p. 159).

En *La Geometría*, se evidencia de manera muy clara la forma en que estas consideraciones en efecto contribuyen de manera significativa a la solución de los problemas mediante ecuaciones. Así, por ejemplo, para encontrar la media proporcional entre dos líneas, Descartes establece una proporción entre las cantidades involucradas llegando a una ecuación que permite tratar el problema:

La determinación de dos medias proporcionales

Si se quiere, entonces, siguiendo esta regla encontrar dos medias proporcionales entre las líneas a y q, se sabe que designando z a la una: como a es a z, así z es a $\frac{zz}{a}$, y $\frac{zz}{a}$ a $\frac{z^3}{aa}$: de modo que hay ecuación entre q y $\frac{z^3}{aa}$ es decir:

$$z^3 = ** \, a\,a\,q$$

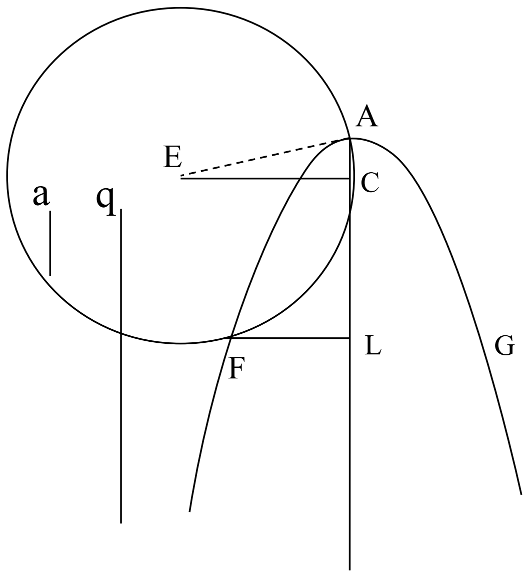


Figura 5.
(Fuente: *La Geometría)*

Y la parábola FAG estando trazada con la parte de su eje AC que es $\frac{1}{2}a$, la mitad de su lado recto, debe, por el punto C, elevarse la perpendicular CE igual a $\frac{1}{2}q$ y del centro E, por A, describiendo el círculo AF se encuentran FL y LA, para las dos medias proporcionales buscadas.

A partir de la introducción de la unidad, la redefinición de la multiplicación y la representación de las magnitudes geométricas mediante segmentos, Descartes plantea que "para considerarlas en conjunto era conveniente que las representara por cifras. Por este procedimiento pondría a contribución el análisis geométrico y el álgebra y corregiría los defectos con las ventajas que su uso me reportará" (Descartes, 2006, p. 18). A partir de entonces las cifras ya no sólo expresarán las magnitudes aritméticas, sino también las geométricas y "explicarán", de esta manera, la medida; en el proceso resolutivo de los problemas adquirirán la independencia operatoria a la que hemos aludido anteriormente, traduciéndose en ganancia para el campo numérico en "estructura algebraica" y en generalidad, gracias al uso de literales para representarlas, como veremos a continuación.

La representación figural y literal del número

En la Regla XIV Descartes explica la manera como el entendimiento, que se ocupa de "entidades abstractas", debe ser ayudado por la imaginación para representárselas. En el caso que nos ocupa, el número pertenece a esta clase de entidades y, por lo tanto, el papel de la imaginación será representarlo mediante los segmentos, figura que considera se presenta como la más simple a los sentidos, y que en *La Geometría* le posibilitará, como ya vimos, construir las raíces de las ecuaciones:

> Por medio de las mismas figuras (las líneas rectas) deben mostrarse tanto las magnitudes continuas como también la multitud o el número; y para exponer todas las diferencias de los modos no hay nada más simple que pueda ser hallado por la habilidad humana[19].

Así, una afirmación como "**el número no es la cosa numerada"**, es realizada por el entendimiento puro y sólo él puede establecer su veracidad, debido a que "es el único que tiene la facultad de separar entes abstractos de esta clase" (Regla XIV, p. 164). Identificamos entonces un tipo de operación efectuada por el entendimiento puro que permite separar la "multitud" de la "cosa numerada", pero que en todo caso, apela a la imaginación para que sea representada mediante las figuras:

> Así, si la cuestión es acerca del número, imaginemos un objeto que pueda ser medido por muchas unidades; aunque el entendimiento en esta ocasión sólo reflexione en esta multitud, nos cuidaremos, sin embargo, de concluir de aquí algo en lo que se suponga que la cosa numerada ha sido excluida de nuestro concepto (Descartes, 2003, Regla XIV, p. 165).

19 Descartes (2003, p. 172).

Este tipo de operación mental, que podríamos considerar como cierta "abstracción", permite llevar a cabo una nueva representación a través de los literales tomados del simbolismo algebraico y que nuevamente posibilitan este ir y venir del mundo de las entidades abstractas al de la solución de los problemas geométricos. El ejemplo planteado por Descartes deja ver lo poco que le interesa el cálculo numérico, es decir, las operaciones aritméticas que se hacen sobre los signos numéricos para obtener nuevos números: si queremos encontrar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 9 y 12, no nos interesa ni 15 ni $\sqrt{225}$, debido a que en el número, las dos "partes distintas", a^2 y b^2 permanecen "confusas" (Regla XVI). Es más conveniente expresar la hipotenusa mediante $\sqrt{a^2 + b^2}$ y recurrir a los números sólo en la medida en que con esto simplifiquemos la dificultad:

> Finalmente, es preciso advertir que incluso si aquí abstraemos de ciertos números los términos de la dificultad para examinar su naturaleza, sin embargo sucede con frecuencia que aquella puede ser resuelta de un modo más simple con los números dado que si se la abstrajera de ellos: esto sucede por el doble uso de los números, al que ya antes hicimos referencia, a saber, porque los mismos explican tanto el orden como la medida; y por lo tanto, una vez que la hemos buscado expresada en términos generales, conviene someterla a los números dados, para que veamos si quizá ellos nos proporcionan una solución más simple (Descartes, 2003, Regla XVI, p. 175).

Así, pues, el número, entidad abstracta, en primer lugar tiene un referente geométrico al ser representado mediante los segmentos; con su designación por letras que representan su longitud, y con esto, su ubicación en el campo algebraico, es posible realizar con ellos un conjunto de operaciones ya no sobre los números sino sus representaciones simbólico-algebraicas, liberándose del referente geométrico y logrando la claridad y la generalidad deseada por Descartes.

Conclusiones

La importancia matemática de la obra cartesiana es reconocida ampliamente por sus aportes frente a la creación de lo que se llamaría posteriormente "Geometría Analítica", entendida como la disciplina capaz de abordar problemas geométricos a través de instrumentos algebraicos. El ingreso de las coordenadas como referente, la asociación de curvas con ecuaciones, la "estructura algebraica" para las operaciones entre magnitudes geométricas vía el ingreso del segmento unidad y de la redefinición del producto entre segmentos, entre otros, son las contribuciones matemáticas más relevantes de esta obra.

Aunque diversos autores reconocen en Descartes gérmenes fundamentales de objetos matemáticos esenciales como los de variable y función, son pocos los que se atreven a identificar en él avances significativos en torno a la constitución de $\mathbb{R}$ como objeto matemático. En este trabajo encontramos que aún sin ser un ejercicio intencional o al menos explícito, sí presenta tratamientos sobre los números que permiten considerarlos como avances en comparación con su función en desarrollos previos como los de Cardano o Vieta, como por ejemplo, lo relativo a los negativos. Aunque no sea posible afirmar que Descartes contaba con $\mathbb{R}$ como una estructura ordenada y completa, en los desarrollos de *La Geometría* se encuentra un tratamiento sobre las raíces y los coeficientes de las ecuaciones algebraicas que permite observar y analizar la forma en la cual los números, además de representantes de longitudes de segmentos, tal como se evidencia en la solución de los problemas geométricos, también fungían como "números abstractos" dotados de un cierto campo operatorio con algún nivel de generalidad, producto del tratamiento algebraico expuesto.

Del estudio presentado en este capítulo podemos concluir que aunque el trabajo cartesiano permite una nueva constitución de objetos geométricos vía la Tematización, de acuerdo con Gardies, no sucede igual con $\mathbb{R}$. Pero Descartes avanza en la consolidación de un conjunto de objetos con una estructura algebraica que en los siglos posteriores constituirán la base sobre la cual se consolidará $\mathbb{R}$ como un conjunto numérico completo.

De la misma forma, del tratado completo de *La Geometría* podemos reconocer cómo a través del uso de la técnica cartesiana para la solución de problemas geométricos, este matemático encontró modelos algebraicos de los mismos que le permitieron tratar con tipos generales de problemas y no con problemas aislados, identificando, gracias al simbolismo algebraico, la estructura global de estos problemas y su consecuente manipulación.

Como consecuencia de lo anterior, Descartes al resolver por vía de la modelación algebraica los problemas geométricos pudo cuestionar el tipo de soluciones, si existían, cuántas eran, de qué naturaleza, a través de la exhibición de su estructura. Con lo anterior se presentó la emergencia de nuevos problemas distintos a los planteados inicialmente. Un caso que permite ejemplificar tal juicio fue la relación curva - ecuación, a partir de lo cual se configura la curva geométrica en un contexto distinto al euclidiano.

Bibliografía

Álvarez, C. (2000). "Descartes, lector de Euclides". *En Álvarez y Guzmán (Eds.) Descartes y la ciencia del siglo XVII.* México: Siglo XXI.

Apolonio, P. (2000). *Conics. Book I-III.* (R. Catesby Taliafero, Trad., ed. rev.). Santa Fe, New México.

Bolea, P. (2003). *Los procesos de algebrización de las Organizaciones Matemáticas Escolares.* Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza; Zaragoza, España.

Descartes, R. (1947). *La Geometría.* Buenos Aires, Argentina.

Descartes, R. (2003). *Reglas para la dirección del espíritu.* Madrid, España: Editorial Alianza. Traducción de Juan Manuel Navarro Cordón.

Descartes, R. (2006). *Discurso del método.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Porrúa.

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Ápistemologie et historie.* Paris: Cedic/Fernand Nathan.

Dhombres, J. (2000). *La banalidad del referencial cartesiano. Descartes y la ciencia del siglo XVII.* México: Siglo XXI.

Gardies, J. L. (2001a). *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse?* . París, Francia: Librería filosófica J. Vrin.

Gardies, J. (2001b). *La thématisation en mathématiques.* París: Librería filosófica J. Vrin.

Giusti, E. (2000). *l'Esprit des sciences. La naissance des objets mathématiques.* París, Francia: Ellipses Edition 2000.

Panza, M. (1996). "The unity of question of analysis and synthesis in mathematics. Classical sources for the concepts of analysis and synthesis". En M. Otte y M. Panza (Eds.). *Analysis and synthesis in mathematics.* Londres, U. K.

Panza, M. (2006). What is new and what is old in Viête's analysis restituta and algebra nova, and where do they come from? Some reflections on the relations between algebra and analysis before Viête. *En prensa*.

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

Capítulo 5

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO MATEMÁTICO: LA "CONSTRUCCIÓN" DE DEDEKIND

Gabriela Arbeláez[1]
Fernando Gálvez[2]

Introducción

Los anteriores artículos, dedicados al tratamiento de algunas problemáticas asociadas al desarrollo histórico de los números reales $\mathbb{R}$, han ofrecido antecedentes epistemológicos y filosóficos para abordar el momento crucial de dicho proceso: la creación de los números reales en el siglo XIX. Como se verá, este episodio constituye un eslabón decisivo en lo que aquí hemos denominado la constitución de $\mathbb{R}$ como objeto matemático. Particularmente nos centraremos en el trabajo de Richard Dedekind (1831-1916) por razones de orden didáctico. Para tal efecto, queremos resaltar algunos aspectos de tipo filosófico y epistemológico que, por razones prácticas, son ignorados en el tratamiento de $\mathbb{R}$ en los contextos escolares, pero de suma importancia para entender la naturaleza de este objeto. Sin embargo, creemos que las limitaciones en el sistema curricular de la educación media no deberían eximir al docente de un acercamiento en esta materia. En este sentido, iniciamos el capítulo con una breve caracterización del problema filosófico que articula este texto: la cualidad de objeto matemático atribuida a $\mathbb{R}$.

---

1 Profesor del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle.

2 Profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca. Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle-Universidad del Cauca.

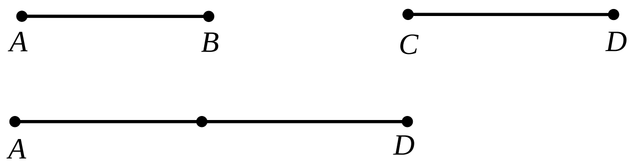
Cuando afirmamos que $\mathbb{R}$ *es un objeto matemático,* queremos adjudicar un sentido particular a esta expresión que remite al problema de existencia y realidad matemática. Este estatus alude a un nivel elevado de existencia matemática, el cual podemos reconocer desde el momento mismo de una formulación axiomática del objeto. Por lo tanto, la afirmación inicial sólo adquiere sentido a partir del siglo XIX cuando $\mathbb{R}$ es exhibido bajo una modalidad tal (Meray, Weierstrass, Dedekind, Cantor y otros). Sin embargo, esta condición de objeto matemático para el caso de $\mathbb{R}$ está asociada a un proceso de prefiguración, donde el número real se "advierte" en distintos momentos previos al siglo XIX (como lo han mostrado los artículos precedentes).

Lo que se quiere aquí no es defender una concepción absoluta y acabada de la noción de objeto matemático; lo que se pretende es destacar un nivel diferenciado de existencia matemática, evidente "desde el momento" en el que una entidad se puede "manipular" a través de sus propiedades y relaciones con otros objetos; es decir, se puede reconocer dentro de un dominio de objetos y relaciones que llamamos teoría. En este orden de ideas, es importante aclarar que la existencia así entendida no es "metafísica" sino lógica y epistemológica.

Para ejemplificar lo anterior, ubiquémonos en un momento prefigurativo de $\mathbb{R}$ y lejano al siglo XIX: la definición de *continuidad* de Aristóteles en el siglo V a.C. En su *Física,* él afirmaba que las magnitudes extensas (la recta geométrica, el espacio, el tiempo, etc.) tenían como propiedad esencial la continuidad, la cual define así:

> Lo continuo (*synechés*) es una subdivisión de lo contiguo; así, por ejemplo, digo que una cosa es continua con otra cuando sus límites que se tocan entre sí llegan a ser uno y lo mismo y, como indica la palabra, se "con-tienen" entre sí, pero si los extremos son dos no puede haber continuidad (Aristóteles, 1998, p. 244).

Para Aristóteles la continuidad es una relación de "dos términos", pero lo complejo es que no es posible exhibirlos de manera individual porque dejarían de constituir un continuo. Miremos esto geométricamente: pensemos en dos rectas *AB* y *CD* que se suman (en el sentido de Euclides) por sus extremos *B* y *C*:



El resultado de esta operación es la recta continua *AD*; pero lo que nos interesa señalar es que para constituir dicho continuo, los dos puntos *B* y *C* debieron reducirse a uno.

Ahora analicemos la situación recíproca: tomemos la recta *AD* y señalemos en ella un punto *B*. Para Aristóteles la exhibición individual del punto *B* implica la división de la recta en ese punto. De esta manera obtenemos dos rectas: *AB* y *BD*. Esto significa que *B* ha dejado de ser uno y se ha convertido en dos, extremo final de una recta y extremo inicial de la otra. Es decir, no es posible exhibirlo de manera individual. He aquí la dificultad lógica y epistemológica por la cual los griegos consideraban que un continuo no se puede definir como un compuesto de puntos.

Esta dificultad va a prevalecer hasta que el pensamiento matemático movilice un esquema de representación para la continuidad que no se fundamente en la intuición geométrica ni en representaciones espacio-temporales. En esta dirección, se puede explicar la emergencia de la teoría de conjuntos en el siglo XIX; a través de ella es posible "exhibir" o dar garantía de existencia individual de un elemento en un dominio continuo. En otras palabras, la creación de los números reales obedece a la necesidad de dar forma matemática a la propiedad de completez. Cuando esto se logra nosotros consideramos que la continuidad deja de ser una mera propiedad de objetos y pasa a constituirse ella misma en objeto matemático, es decir, el continuo.

Para aclarar la anterior explicación pensemos, a manera de ejemplo, en el color blanco; ser blanco significa poseer la blancura como atributo; sin embargo, lo blanco en sí mismo no parece posible en un orden de existencia, es decir blanco es siempre una cualidad de algo y nunca un objeto del cual se pueda predicar su existencia autónoma e independiente. Otro ejemplo y de carácter más matemático lo podemos ofrecer en el mismo contexto griego: ubiquémonos en la geometría de Euclides (los *Elementos*) y pensemos particularmente en la manera de garantizar la existencia de sus entes geométricos. Aparte de los objetos primitivos, que son las rectas, él requiere de otros objetos no primitivos como triángulos, cuadrados, paralelogramos, etc. Así, el cuadrado obtiene un primer estatuto de existencia a través de la definición I, 22 que dice:

> De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámense trapecios las demás figuras cuadriláteras (Euclides, 1991, p. 195).

Sin embargo, esta modalidad de presentar el objeto, vía definición, no es suficiente para Euclides en el marco de su teoría. El cuadrado demanda un modo de existencia el cual sólo alcanza en la proposición I, 46 mediante la exhibición constructiva del objeto. Ahora bien, los anteriores ejemplos nos permiten acercarnos mejor al problema de la continuidad en Euclides: los objetos de Euclides se dicen continuos en consonancia con las operaciones y propiedades posibles en la teoría como, por ejemplo, la propiedad *arquimediana*[3]. Sin embargo, no hay en el *corpus* teórico de Euclides un intento por definir, ni menos por construir, la propiedad de continuidad; esta constituye para él un *a priori,* la continuidad es una condición natural de sus objetos y ella es suficiente para construir su teoría. En este sentido, nosotros decimos que en Euclides la continuidad es una propiedad de objetos matemáticos, pero no hay nada en este contexto que permita siquiera sospechar el continuo como un objeto matemático en el sentido antes mencionado.

Un último ejemplo, en aras de afianzar esta caracterización, lo constituye, en el mismo escenario griego, el hallazgo de las magnitudes inconmensurables y el problema de la irracionalidad. Sabemos que los pitagóricos en sus trabajos llegaron a un resultado que los obligó a aceptar la “existencia” de un tipo de cantidad que por su naturaleza inaprensible ellos denominaron irracional. Pero, ¿qué significa este hallazgo en la perspectiva de objetivación de $\mathbb{R}$? Hay que tener clara la diferencia entre el valor de “existencia” que atribuimos a una entidad que emerge, vía operatoria, en el proceso de resolución de un problema particular, y el estatus de existencia atribuido a un objeto que emerge en el marco de una teoría axiomática.

De manera más específica, el hallazgo de una cantidad equivalente a lo que actualmente reconocemos como raíz de dos o π, no constituye una caracterización del número irracional tal que permita definir formalmente el dominio $\mathbb{R}$ de los reales, como sucedió en el siglo XIX. Nosotros queremos resaltar con esto que el hallazgo original de una entidad matemática no garantiza de suyo su existencia. En nuestro caso, la evidencia de cantidades irracionales es un hecho sancionado más de veinte siglos antes de los trabajos de Dedekind y Cantor; sin embargo, ello no fue suficiente para dar garantías de existencia matemática a los irracionales.

Antecedentes de orden histórico y epistemológico a partir de algunas problemáticas asociadas a la enseñanza de $\mathbb{R}$

Como lo hemos mencionado, por razones de orden práctico, los textos de educación media obvian en general los aspectos epistemológicos que antecedieron la construcción de $\mathbb{R}$. Aunque no es nuestro propósito realizar un análisis de textos escolares, queremos mostrar cómo algunas problemáticas de este orden se podrían asociar a dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los números reales.

En este apartado nos centraremos fundamentalmente en una problemática histórica que tuvo lugar en las primeras décadas del siglo XIX, alrededor de una propiedad fundamental de la continuidad: el *teorema del valor inter-*

3 La Definición V.4 de los *Elementos,* Euclides la expresa en los siguientes términos: *Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.*

medio (T.V.I.). En los textos escolares se alude a este resultado, sin poner de relieve las limitaciones de la evidencia gráfica o intuición geométrica, que, como lo veremos, fue un tema central en esta fase del proceso de constitución de $\mathbb{R}$ y, en buena medida, motivó los trabajos de Dedekind y otros.

Continuidad geométrica y continuidad aritmética: la formulación del T.V.I.

La propiedad de que toda curva continua en un intervalo cerrado alcance todos sus valores entre las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ fue antes de la época de Cauchy y Bolzano un hecho evidente e incuestionable a la intuición geométrica. Es decir, la certeza geométrica suplía la exigencia teórica de una demostración. Pero en la primera mitad del siglo XIX, con los trabajos de estos dos matemáticos comienza a plantearse la necesidad de una prueba matemática de esta propiedad. En este sentido, Bolzano en su artículo titulado *Demostración puramente analítica del teorema: entre dos valores cualquiera que dan dos resultados de signos opuestos se halla al menos una raíz real de la ecuación*, plantea lo siguiente:

> El tipo más común de demostración depende de una verdad copiada de la geometría, a saber, que cada línea continua de curvatura simple de la cual las ordenadas son primero positivas y luego negativas (o recíprocamente) debe necesariamente intersecar el eje de las X en algún punto que esté entre dichas coordenadas: ciertamente no hay cuestionamientos ni a la corrección ni a la obviedad, de esta proposición geométrica. Pero es claro que es una ofensa intolerable contra el método correcto para derivar verdades de las matemáticas puras (o generales) (esto es aritmética, álgebra, análisis) a partir de consideraciones que pertenecen a una parte meramente aplicada (o especial), a saber, la geometría (Bolzano, 1991).

En esta cita Bolzano sitúa la propiedad del valor intermedio en el marco de una discusión relativa al problema de fundamentación matemática. No es la verdad o evidencia geométrica lo que se discute aquí, es la autoridad que tendría la geometría como campo de conocimiento para ofrecer una garantía universalmente verdadera de esta propiedad. La matemática en su conjunto la constituyen diversos campos de conocimiento entre los cuales existe un grupo diferenciado en virtud de su universalidad (análisis, álgebra, aritmética) y que constituye su base fundacional. Para Bolzano es claro que la geometría no hace parte de dicho grupo. Es en este sentido que se pronuncia en contra de las justificaciones ofrecidas hasta ese momento de la propiedad del valor intermedio.

Aunque Bolzano y Cauchy ofrecieron, por separado, una demostración del teorema del valor intermedio, quedaron aún problemas de rigor asociados a la propiedad de completez. Veamos esto a partir de la prueba que realiza Cauchy en su *Curso de Análisis* de 1821:

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[A,B]$, si $f(A) < 0$ y $f(B) > 0$, entonces la ecuación:

$$f(x) = 0 \ (1)$$

Se satisface para uno o más valores de la variable x entre A y B.

En su prueba, Cauchy comienza por dividir el intervalo $[A, B]$ en m partes, donde m es un número mayor que 1; obteniendo de esta manera la siguiente sucesión finita:

$$A,\ A+\frac{h}{m},\ A+\frac{2h}{m},\cdots,A+\frac{(m-1)h}{m},B$$

Y su correspondiente sucesión de ordenadas:

$$f(A),\ f\left(A+\frac{h}{m}\right),f\left(A+\frac{2h}{m}\right),\cdots,f(B);\ donde\ h=B-A$$

Evidentemente, esta última sucesión debe contener dos valores sucesivos con signos diferentes. Llámese a las abscisas de estos valores A_1, B_1. Luego, sobre este nuevo intervalo $[A_1, B_1]$, Cauchy efectúa la misma operación anterior, obteniendo así una nueva sucesión:

$$A_1,\ A_1+\frac{h}{m^2},\ A_1+\frac{2h}{m^2},\cdots,B_1$$

Y su correspondiente sucesión de ordenadas:

$$f(A_1),\ f\left(A_1+\frac{h}{m^2}\right),\ f\left(A_1+\frac{2h}{m^2}\right),\cdots,f(B_1)$$

Con el mismo argumento, debe haber dos valores que toman signos contrarios: llámense A_2, B_2 a las abscisas correspondientes. Cauchy itera ese proceso indefinidamente puesto que si en algún momento se detuviera habría encontrado el número que satisface la ecuación (1). Si éste no fuera el caso, se obtendrían dos sucesiones:

$$A, A_1,\ A_2,\cdots,A_n,\cdots \quad \text{y}$$

$$B, B_1, B_2,\cdots,B_n,\cdots$$

La primera creciente y la segunda decreciente, ambas acotadas, por encontrarse cada uno de sus elementos en el intervalo $[A, B]$. Cauchy afirma que estas sucesiones deben converger a un número real C (ambas al mismo número, por la manera en que han sido construidas). Luego utiliza la continuidad de la función para afirmar que la sucesión de valores

$$f(A),\ f(A_1), f(A_2), \cdots, f(A_n), \cdots \quad \text{y}$$
$$f(B),\ f(B_1), f(B_2), \cdots, f(B_n), \cdots$$

convergen ambas al valor $f(C)$, y por conservar ambas signos distintos entonces

$$f(C) = 0$$

Este método de aproximar la raíz de una ecuación por aproximación de valores positivos y negativos, era conocido desde antes del siglo XVII. Sin embargo, el aporte del matemático francés fue haberlo usado para mostrar la existencia de un "número real", a partir de la construcción de dos sucesiones infinitas que cumplen las características de ser monótonas y acotadas. Actualmente sabemos que, en este caso, Cauchy hizo uso de la propiedad de completez de los números reales. Este hecho constituye uno de los aspectos más problemáticos en su prueba, pues significa presuponer la existencia del conjunto de los números reales. Veamos a continuación las implicaciones epistemológicas de esta presunción:

Cauchy sabía que una sucesión $\{x_n\}$ converge a un número real A, o en nuestro lenguaje: $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ si la diferencia $|x_n - A|$ se puede hacer tan pequeña como se desee, con tal de que n se tome lo suficientemente grande. Hasta aquí no hay ningún problema; es lo que hoy conocemos. Pero, obsérvese que en esta definición se debe conocer de antemano el valor A hacia el cual converge el límite. Sin embargo, en la prueba del valor intermedio Cauchy construye el valor C a partir de las sucesiones. El problema de la convergencia entonces no se resuelve en la definición de límite.

El asunto es que Cauchy puede garantizar la existencia de ese límite sin conocer el valor al cual converge, con tal de que la sucesión se comporte de una cierta manera: una sucesión $\{x_n\}$ es fundamental, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $|x_n - x_m| \prec \varepsilon$. Este criterio lo satisfacen las sucesiones monótonas y acotadas que construye Cauchy en la prueba del valor intermedio, y por lo tanto se puede garantizar el valor C en (1).

Podemos resumir lo anterior analizando el siguiente enunciado (escrito en lenguaje moderno):

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe si y sólo si } \{x_n\} \text{ es una sucesión fundamental.}$$

La primera implicación no tiene ningún problema en el marco del análisis de Cauchy, sin embargo la implicación recíproca (toda sucesión fundamental converge a un número real), él la asumía como un principio evidente que no requería demostración y la utilizaba sin ningún problema en diversos ámbitos, como, por ejemplo, para demostrar la existencia de la integral definida.

Para Cauchy, demostrar rigurosamente que una sucesión concreta converge a un límite determinado exige, de una parte, que la sucesión cumpla con una ley de composición, y de otra, que el espacio de variación sea un espacio completo. Pero, para él, el universo de variación numérica es, *a priori*, un espacio completo. Sin embargo, históricamente se demostró que no era conveniente partir de este *a priori*, sino que se debía dar una respuesta a partir de los insumos conceptuales propios de la teoría; la construcción aritmética de los reales por parte de Dedekind y Cantor, entre otros, constituyó una salida a este vacío conceptual.

Por este hecho, la prueba del teorema del valor intermedio desarrollada por Cauchy no garantiza con rigor la existencia del valor buscado y, en general, no es posible la formulación rigurosa de un principio de continuidad, ni de las nociones de límite y convergencia. Sin embargo, es Cauchy quien se ha propuesto una tarea que la tradición aristotélica antes de él evadió: elevar la continuidad a una forma matemática. Esto es igual que intentar responderse desde las matemáticas mismas qué es o cómo es la continuidad.

La búsqueda de fundamentos no es otra cosa que elevar a la esfera exclusivamente matemática los conceptos centrales que giran en torno a la continuidad, es decir: infinito, límite, sucesión, convergencia, entre otros. A partir del trabajo de Cauchy se logra, entonces, desnudar el problema fundamental del análisis en tanto que disciplina rigurosa: no hay formalización de la continuidad si no existe el continuo. Para Aristóteles y la tradición que él envuelve, el ser de la continuidad no necesita lo continuo en sí; a partir de Cauchy el ser de la continuidad presupone el ser del continuo.

Ahora mencionaremos de manera tangencial otros aspectos epistemológicos asociados a la noción de continuidad, que frecuentemente pasan inadvertidos en los textos escolares.

Continuidad y procesos infinitos

El número real se halla en el centro de un circuito conceptual que abarca las nociones de continuo, continuidad, límite, convergencia e infinito. Este último es transversal a todos y, sin duda, es uno de los más controvertidos en la historia de las matemáticas occidentales, tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. En general, los textos presentan esta noción de manera intuitiva, soslayando su complejidad e ignorando el carácter paradójico que encierra cuando se le anteponen intuiciones finitistas. Desde esta perspectiva, un tanto ingenua, se trasmiten nociones fundamentales como sumas infinitas, conjuntos infinitos, e incluso en algunos textos se definen los números irracionales como los números que se pueden representar como expresiones decimales infinitas no periódicas.

Pero, ¿qué significa un número con infinitas cifras? ¿Qué significa sumar infinitas cifras? ¿Tiene o no sentido la afirmación: el número π tiene cinco sietes seguidos en su representación decimal? Aunque no pretendemos ahondar en el problema filosófico que pudo haber acarreado este tipo de cuestiones, sí debemos decir que la “construcción” de los números irracionales emergió en un momento en el que se comenzaba a explorar y a cuestionar ciertas técnicas que surgían de la incorporación de los conjuntos actualmente infinitos[4]. Es en virtud de esta problemática que surgen ciertas corrientes de la filosofía de las matemáticas, como por ejemplo el intuicionismo, a partir del cual se empezaron a cuestionar principios lógicos tan arraigados al pensamiento occidental como la ley del tercero excluido. Según ellos, este último era un principio asociado a unas matemáticas finitistas, pues es imposible verificar si se satisface una determinada propiedad para un conjunto actualmente infinito; por lo tanto no es posible en este caso decidir si *P* o la negación de *P*. Pero más allá del problema filosófico de la existencia de estas entidades, nos interesa mencionar algunos elementos de tipo epistemológico en la perspectiva de la educación matemática.

Los textos mencionan sin problema el hecho de que un número con infinitas cifras periódicas se puede llegar a expresar como un cociente entre enteros. Por ejemplo, se identifica la representación decimal infinita: $0.\overline{9}$, con 1. El método que normalmente se utiliza es el siguiente:

Sea $x = 0.\overline{9}$, entonces $10x = 9.\overline{9}$. Realizando la operación:

$$\begin{array}{r} 10x = 9.\overline{9} \\ -x = -0.\overline{9} \\ \hline 9x = 9 \\ x = 1 \end{array}$$

Pero, si observamos en el anterior procedimiento hay algunas dificultades de tipo epistemológico. En primer lugar, aparece soslayado el problema de los procesos infinitos, porque se está multiplicando por 10 un desarrollo infinito. En segundo lugar, la anterior igualdad se puede explicar rigurosa-

4 Desde la época de Aristóteles se hizo la distinción entre el infinito potencial y actual. El primero se refiere a un infinito como mera posibilidad; es decir, una cantidad es infinita (desde el punto de vista potencial) si es posible siempre tomar algo más de lo que ya ha sido tomado. En contraste, para el infinito actual, una cantidad es infinita si existe como una totalidad, como un algo acabado, como una unidad.

mente sólo a partir de un instrumento teórico oculto que es el de la convergencia. Es decir, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1$. O, en otras palabras, la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$ tiene por límite 1. Este problema aparece en la historia de las matemáticas claramente planteado por Bolzano y Cauchy a mediados del siglo XIX, y lo podemos esbozar de la siguiente manera:

El problema de la convergencia está asociado históricamente a la necesidad de dar jurisdicción matemática a los procesos infinitos. La aritmética abrió todo un campo de indagación a este respecto, en busca de dar salida a problemas que habían surgido del seno de la geometría, como es el caso de las sumas infinitas. Resolver esto significaba hallar las condiciones formales que permitieran otorgar un valor a la suma o establecer un último término de una sucesión infinita. En esa tentativa se destacaron matemáticos como Wallis, Leibniz, Newton y Euler, entre muchos otros. Bolzano, en su libro *Las paradojas del infinito,* también llama la atención sobre este problema.

Él afirmaba que la expresión

$$a - a + a - a + \cdots \textit{ in inf}$$

no es una cantidad real pues según se agrupen sus términos, se obtendrán distintos valores en su suma:

$$(a - a) + (a - a) + \cdots \textit{ in inf} = 0 + 0 + 0 + \cdots \textit{ in inf} = 0$$

Pero, si se agrupa

$$a + (-a + a) + (-a + a) + \cdots \textit{ in inf} = a$$

o así:

$$-a + (a - a) + (a - a) + \cdots \textit{ in inf} = -a$$

La salida a estas paradojas sobre sumas infinitas sólo se dio a través de la noción de convergencia. Citemos textualmente la definición de Cauchy en su *Curso de Análisis:*

Siguiendo los principios aquí establecidos, para que una serie

(1) $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$

sea convergente, es necesario y suficiente que los valores crecientes de n hagan converger indefinidamente a la suma

$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$

hacia un límite fijo S, en otras palabras, es **necesario y suficiente** que, para los valores infinitamente grandes del número n, las sumas

$$S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$$

difieran del límite S, y en consecuencia difieran entre sí, en cantidades infinitamente pequeñas (Cauchy, 1994, p. 150).

Cauchy, al igual que Bolzano, quiere significar que no hay sumas infinitas en el sentido literal o, mejor dicho, se requiere una salida algebraica que permita expresar lo infinito a través de lo finito: la suma infinita se puede ver como una sucesión de sumas parciales. Es decir, el símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, mediante el cual le damos vía libre a las sumas infinitas, es una sucesión de sumas parciales y encontrar la suma infinita equivale a hallar un límite. Otro problema visible en la enseñanza de $\mathbb{R}$ tiene que ver con su representación. Generalmente se representa la recta geométrica y se ubican en primer lugar los números enteros, luego los números fraccionarios (positivos y negativos) y en algunos casos se ubican unos pocos irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., a través de construcciones usuales con regla y compás y finalmente se generaliza afirmando que hay una correspondencia biunívoca entre puntos de la recta y números reales. En esta presentación se oculta claramente el problema de la imposibilidad de construir con regla y compás la "mayoría" de números irracionales y el significado matemático de fondo de la biyección entre puntos de la recta y números reales.

Continuidad y completez en Dedekind

Es habitual ignorar el origen y las motivaciones que acompañan un trabajo matemático. Por esta razón, es común pensar que la actividad matemática y sus resultados obedecen exclusivamente a actos de naturaleza puramente matemática. Sin embargo, queremos iniciar esta reflexión resaltando la singularidad de las razones que condujeron a la objetivación de $\mathbb{R}$ en el siglo XIX. La decisión de emprender una investigación sobre los fundamentos de la matemática, como en el caso de Dedekind, pasa por una actitud filosófica, previa a la cristalización del proyecto matemático propiamente. El horizonte investigativo de un matemático es el resultado de una toma de posición inicial acerca de la naturaleza de las matemáticas.

Por ejemplo, gran parte de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII privilegiaron la solución de problemas antes que la búsqueda de una explicación lógica de los procedimientos e instrumentos implementados en matemática. Pero los matemáticos del siglo XIX se caracterizaron por retomar la directriz griega del culto al rigor. Lo que se quiere expresar aquí es que en la formulación axiomática de $\mathbb{R}$ a finales del siglo XIX se halla latente esta actitud filosófica. Dejemos que sea el propio Dedekind quien exprese su posición filosófica respecto a la matemática y nos permita encaminar nuestra investigación a partir de las consecuencias que de ella se desencadenan:

> En la noción de aproximación de una magnitud variable a un valor límite fijo, especialmente en la demostración del teorema que establece que toda magnitud que crece constantemente, pero no más allá que todo límite, se aproxima a un valor límite, tuve que apoyarme en evidencias geométricas. Aún hoy considero extraordinariamente útil, desde el punto de vista didáctico, ese recurso a la intuición geométrica en una primera enseñanza del cálculo diferencial; me parece incluso indispensable si no se quiere perder un tiempo excesivo. Pero nadie negará que ese tipo de introducción en el cálculo diferencial no puede tener ninguna pretensión de cientificidad. El sentimiento de insatisfacción era para mí tan aplastante, que tomé la firme determinación de reflexionar tanto como fuera necesario hasta encontrar una fundamentación puramente aritmética y totalmente científica de los principios del cálculo infinitesimal. Se dice a menudo que el cálculo diferencial se ocupa de las magnitudes continuas, y sin embargo nunca se da una definición de esa continuidad, e incluso las exposiciones más rigurosas del cálculo diferencial no basan sus demostraciones en la continuidad, sino que apelan con mayor o menor conciencia a representaciones que son geométricas o bien movidas por la geometría, o se apoyan en teoremas que no han sido nunca demostrados de forma puramente aritmética. Entre esos se encuentra por ejemplo el mencionado antes, y una investigación más precisa me convenció de que aquel teorema o cualquier otro equivalente podía considerarse ciertamente como fundamento suficiente para el análisis infinitesimal. Ya sólo se trataba de descubrir su auténtico origen en los elementos de la aritmética, alcanzando simultáneamente una verdadera definición de la esencia de la continuidad (Dedekind, 1998, p. 79).

Como lo hemos señalado anteriormente, la intuición geométrica ha sido históricamente un apoyo recurrente en las matemáticas, hasta el siglo XIX, cuando se plantea un debate sobre sus limitaciones. En la cita, Dedekind alude a este recurso en procedimientos que implican las nociones de *paso al límite* y *convergencia*. Según él, la intuición geométrica posee un valor didáctico, en la medida en que permitiría una primera aproximación a la noción de continuidad; pero no aporta nada en un nivel más elevado de conceptualización de esta propiedad. Por lo tanto, para él es necesario construir la continuidad de manera puramente matemática, es decir, tomando como punto de partida la aritmética (los números naturales) y sus operaciones. Esta sería una disciplina bien fundamentada, en el sentido de que no requiere elementos externos (intuiciones geométricas o físicas) para demostrar sus teoremas. Este estatus científico nosotros lo expresamos como la búsqueda de garantías lógicas que otorguen a una entidad o concepto matemático, en este caso a la propiedad de continuidad, el carácter de objeto.

Las propiedades de $\mathbb{Q}$ en la recta geométrica

Lo anterior explica por qué la iniciativa de fundamentar la operación *paso al límite* y el concepto de *convergencia*, implica para Dedekind, y otros, la creación de un dominio numérico completo como los reales. Esta necesidad la hemos presentado en los antecedentes históricos y epistemológicos con los que abrimos este capítulo. Recordemos cómo allí la hemos exhibido a través de la demostración del teorema del valor intermedio por Cauchy. Éste demuestra que las sucesiones construidas satisfacen el criterio de ser fundamentales y, por lo tanto, asume que son convergentes. Para él los números reales son algo dado *a priori*, es decir, no se plantea la necesidad de demostrar la propiedad de completez.

Para Dedekind el primer paso para la obtención de un nuevo dominio numérico es garantizar un punto de partida sólido. Para él los números racionales $\mathbb{Q}$ ofrecen esta garantía ya que se podían definir de manera rigurosa mediante los números enteros. Entonces se trataba de definir los números irracionales a partir de aquellos. Para tal efecto, Dedekind apela a tres propiedades del dominio $\mathbb{Q}$: transitividad, densidad y la propiedad de la cortadura. Esta última parece tan "natural" que ningún matemático hasta el momento consideró importante siquiera enunciarla. Sin embargo, ella se constituirá en la clave epistemológica que lo conducirá a $\mathbb{R}$, pues en ella hallará la esencia de la continuidad, como lo notaremos en el desarrollo subsiguiente. Miremos cómo enuncia las tres propiedades mencionadas:

> Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Siempre que a y c sean dos números distintos (o desiguales) y que b sea mayor que uno de ellos y menor que el otro, queremos expresarlo, sin temor a la reminiscencia de representaciones geométricas, diciendo: b está entre los números a y c.
> Si a y c son números distintos, existen siempre infinitos números b que están entre a y c.
> Si a es un número determinado, todos los números del sistema $\mathbb{R}$ se descomponen en dos clases, A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase A_1 abarca todos los números a_1 que son $< a$, y la clase A_2 abarca todos los números a_2 que son $>a$; el número a puede asignarse arbitrariamente a la primera o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es o bien el mayor número de la primera clase o el menor de la segunda. En cada caso la división del sistema $\mathbb{R}$ en las dos clases A_1 y A_2 es tal que todo número de la primera clase A_1 es menor que cada número de la segunda clase A_2 (Dedekind, 1998, p. 82).

Estas tres propiedades caracterizan a $\mathbb{Q}$ como un dominio unidimensional, con un orden total, y además comparable con la recta geométrica si se piensa ésta como un conglomerado de puntos. No obstante, la manera como existen estos puntos dependerá de la manera como existan los elementos del dominio numérico referencial, en este caso $\mathbb{Q}$. Dedekind quiere que los elementos numéricos se comporten como los "elementos" de la recta y viceversa:

> Si *p* está a la derecha de *q*, y *q* a la derecha de *r*, entonces también *p* está a la derecha de *r*; y se dice que *q* está entre los puntos *p* y *r*.
> Si *p*, *r* son dos puntos distintos, hay siempre infinitos puntos *q* que están entre *p* y *r*.
> Si *p* es un determinado punto de *L*, todos los puntos de *L* se descomponen en dos clases, P_1, P_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase P_1 abarca todos los puntos p_1 que están a la izquierda de *p*, y la segunda clase P_2 abarca todos los puntos p_2 que están a la derecha de *p*; el punto *p* puede asignarse arbitrariamente a la primera o a la segunda clase. En cada caso, la descomposición de la recta *L* en ambas clases o partes P_1, P_2 es tal que todo punto de la primera clase P_1 está a la izquierda de cada punto de la segunda clase P_2 (Dedekind, 1998, p. 82).

Antes de ingresar en el examen de esta analogía entre números racionales y puntos de la recta, queremos señalar aquí una confusión epistemológica asociada a la propiedad de densidad, actualmente recurrente en los ambientes escolares: en algunos momentos históricos se confundió esta propiedad con la propiedad de la continuidad[5]. Notemos, por ejemplo, el caso en Bolzano:

> Si intentamos entonces formarnos una idea clara de lo que llamamos una *extensión continua* o un *continuo*, no podemos evitar la aclaración de que un continuo existe allí y solamente allí donde hay un agregado de objetos simples (puntos en el tiempo o en el espacio, o bien substancias), cada uno de los cuales tiene la propiedad de que, dada una distancia arbitrariamente pequeña, existe siempre otro objeto del mismo agregado que se encuentra en su vecindad. Si no es este el caso; es decir, si, por ejemplo, en un cierto agregado de puntos hay por lo menos un elemento que no se encuentra densamente rodeado de puntos (o sea, cuando no ocurre que para cualquier distancia arbitrariamente pequeña exista un elemento del agregado en su vecindad) llamamos a ese punto un punto aislado y decimos que el agregado en cuestión no constituye un continuo (Bolzano, 1991, p. 107).

5 Algunos historiadores señalan erróneamente que el propio Aristóteles hizo parte de quienes cayeron en esta confusión; esto en virtud de su afirmación de que lo continuo es "aquello divisible en partes siempre divisibles", la cual es una característica análoga a la densidad. Sin embargo, esta lectura de Aristóteles no es precisa: Aristóteles en el libro VI de su *Física* lanza esta afirmación repetidas veces, pero lo hace luego de haber ofrecido dos definiciones de continuidad, tanto en el libro III como en el libro V. Es decir, esta afirmación no se puede entender como una definición de continuidad. Aristóteles no define la continuidad en términos de la densidad, sino que la densidad se desprende como consecuencia de las definiciones anteriores de continuidad. La densidad es para él una propiedad de lo continuo.

Efectivamente, en la cita encontramos un salto epistemológico en el sentido de que él ha comenzado a incorporar un lenguaje conjuntista y, además, introduce conceptos topológicos. Sin embargo, parece que Bolzano identifica lo continuo con lo denso. Nosotros sabemos que si ubicamos los números racionales en la recta geométrica, tal como lo está planteando Dedekind, ellos se encuentran densamente rodeados. Pero Bolzano considera que esta propiedad es necesaria y suficiente para tener un agregado continuo. Ahora bien, en muchos textos de la educación media se privilegia tanto la propiedad de densidad que pareciera que ella subsume a la continuidad. Esto conduce a una apropiación incorrecta del continuo.

Retomemos nuevamente la analogía propuesta por Dedekind y observemos que hasta aquí la relación entre números racionales y puntos no es expresable en un lenguaje matemático. Las tres propiedades mencionadas anteriormente (transitividad, densidad y cortadura) no se pueden extrapolar a un dominio de puntos juzgado en sí mismo. Pensemos, por ejemplo, qué significa la relación de transitividad entre tres puntos, si cada uno de ellos no es identificado a través de un lenguaje numérico que lo dote de individualidad. Consciente de lo anterior, Dedekind dota a la recta de una reglilla en la cual existe un punto de origen (o), una unidad de medida y dos direcciones, una positiva y otra negativa. Con esta herramienta Dedekind hace uso del concepto de medida, en el sentido griego, para asignar puntos de la recta a magnitudes conmensurables con la unidad de medida y viceversa:

Se asigna una unidad de medida y como $\frac{p}{q}$ es un número racional, entonces se puede construir en la recta una magnitud que represente este número. Se toma la dirección positiva o negativa dependiendo del signo del número en cuestión, se divide la unidad en q partes y luego se toman p de ellas. El punto final de esa magnitud es el que va a identificar Dedekind con $\frac{p}{q}$. Recíprocamente, si en la recta se ubica una magnitud conmensurable con la unidad de medida, entonces esta magnitud se puede identificar con un número racional.

Propiedad de la cortadura y esencia de la continuidad

Sabemos que el objetivo de Dedekind es construir un dominio numérico *continuo* o *completo*; pero, ¿qué es un continuo aritmético? Hasta aquí hemos ofrecido sólo una parte de la respuesta, pues hemos mostrado su necesidad lógica y epistemológica, pero aún no tenemos su concreción matemática. Veamos esto con un poco más de detalle: Dedekind parte del hecho de que el prototipo de lo continuo es la recta geométrica; en términos intuitivos, la "continuidad" de la recta se puede definir como la ausencia de interrupciones o huecos, como aquello que es completo o no le falta nada. Dedekind sabe que estas propiedades expresadas así no permiten captar matemáticamente esa idealidad. Por lo tanto, al ubicar un origen, una unidad de medida y establecer para cada segmento de recta, conmensurable con la unidad de medida, un punto de la recta (y recíprocamente), Dedekind está dando el punto de partida para comenzar a estudiar el fenómeno de la recta desde un punto de vista aritmético. En el marco de este proceso que va y viene entre los dominios numérico y geométrico, Dedekind enuncia aquella propiedad esencial que le permite "atrapar" la continuidad en un lenguaje matemático:

> Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes (Dedekind, 1998, p. 150).

Esta propiedad "trivial", como el mismo Dedekind lo afirma, no había sido formulada antes, en virtud posiblemente de los riesgos paradojales que implicaba pensar la recta como un agregado de puntos. Pero la garantía lógica de esta caracterización de la recta descansa en las estructuras aritméticas subyacentes; la existencia del punto al que alude la cita anterior está asociada a un correlato numérico que lo dota de identidad matemática.

Antes de avanzar con este desarrollo, queremos resaltar un aspecto altamente controvertido desde la filosofía de las matemáticas, relativo al papel que juega la imagen de la recta geométrica en esta creación. Para algunos, Dedekind toma la recta geométrica como la "materia prima" con la cual se da forma a los números reales y en la cual reposan las propiedades de la continuidad. Para otros, esta imagen es sólo un correlato en la creación autónoma e independiente de esta entidad formal. No obstante, Dedekind afirma claramente que aquello que denomina "esencia de la continuidad" no obedece a una formulación caprichosa, sino que es la propiedad fundamental que asigna el carácter de lo continuo a la recta (como conglomerado de puntos-números)[6]. Cabe insistir en esto, pues cuando Dedekind crea su nuevo dominio numérico debe demostrar que sus nuevos objetos satisfacen dicha propiedad.

---

6 Hoy sabemos que esta no es la única posibilidad para formular un continuo matemático. La idea leibniziana del continuo como hecho de elementos infinitesimales es hoy una realidad a través de la construcción del análisis no estándar por Abraham Robinson en 1964. Los intuicionistas también tienen una versión del continuo, ajustado a su principio filosófico de no aceptar el infinito actual en matemáticas. Pero, aparte de que estas otras posibilidades de representación del continuo no existían en el momento en que Dedekind construye su teoría, tampoco tenían posibilidad en su imaginario. Esto en virtud de sus concepciones sobre la objetivación en matemáticas, es decir, en virtud de su convicción sobre el carácter necesario, en tanto lógico, de la existencia de los seres matemáticos.

El haber llegado a esa caracterización de la esencia de la continuidad permite a Dedekind dar el paso definitivo para la formulación rigurosa del conjunto de los números reales. Esta última fase del proceso ha sido objeto de controversias filosóficas acerca de si ella constituye un acto creativo y/o constructivo. En el marco de este debate filosófico exhibiremos a continuación los aspectos epistemológicos más relevantes de esta presentación de $\mathbb{R}$.

Construcción y/o creación de los números reales

En el ambiente matemático del siglo XIX se aviva el debate filosófico sobre las condiciones bajo las cuales se legitima la existencia de los objetos matemáticos. En el centro de esta discusión se hallan las nociones de construcción y creación. La polémica se plantea entre quienes piensan que un objeto matemático existe sólo si es exhibido como resultado de un proceso y quienes legitiman una modalidad más abstracta, en la que se asumen ciertos presupuestos aceptados como dados. Si bien las dos modalidades no son necesariamente excluyentes, el debate se centra en cuál modalidad es dominante en la caracterización de los objetos de una cierta teoría.

Sin embargo, nuestro interés aquí no es ingresar en la profundidad de esta polémica sino advertir la diferencia de naturaleza entre algunos objetos propios de la teoría, que llamaremos creados, y algunos instrumentos fundamentales para la creación de otros objetos, que llamaremos construidos. De manera particular nos centraremos en la diferencia epistemológica entre la noción de número real y cortadura. Es una diferencia análoga a la que existe entre una obra y el andamio que acompaña y permite su ejecución. Si bien es impensable erigir un edificio, por ejemplo, sin el instrumento andamio que permite ir construyendo la totalidad de la estructura, luego cuando la acción ha culminado este "objeto" desaparece y aunque nadie repara en su presencia (o ausencia), el autor sabe que jugó un papel fundamental en la realización de su obra.

De manera específica, en el trabajo de Dedekind se pueden advertir estas dos modalidades: se implementan elementos constructivos, pero en función de un resultado sancionado a través de un acto de "libre" creación. Por ejemplo, sabemos que Dedekind parte de un conjunto base como los racionales para la obtención de $\mathbb{R}$. En este sentido, los racionales no constituyen una "construcción" sino una "creación" a partir de los enteros. Sin embargo, $\mathbb{Q}$, visto como un dominio de cortaduras, es un instrumento o una construcción, la cual tiene como objetivo ponernos ante una evidencia: que existen cortaduras que no son producidas por un número racional. Ante la evidencia de esta ausencia o discontinuidad, el matemático abandona el proceso constructivo y "decide", en virtud de su necesidad lógica, la existencia de unos nuevos números llamados irracionales. A esto es a lo que Dedekind llama "libre" creación. Esta libertad es independiente y autónoma con respecto a los condicionamientos de la evidencia sensible. El acto de creación debe cumplir con una condición fundamental: el nuevo dominio numérico debe conservar intactas las propiedades del dominio anterior. Esta condición permite cerrar el proceso homogeneizando lo anterior y lo nuevo bajo una sola denominación: *número real*.

Bajo este enfoque damos curso a la siguiente fase en el desarrollo de Dedekind: la creación de los números irracionales. En primer lugar, Dedekind comienza por definir el concepto de cortadura en $\mathbb{Q}$. Esto le va a permitir crear sus nuevos objetos, verificar aritméticamente el carácter lacunario de $\mathbb{Q}$ y constatar la propiedad de completez (o continuidad) de los nuevos objetos.

Una cortadura (A_1, A_2) sobre los números racionales $\mathbb{Q}$ es una partición de este conjunto en dos clases A_1 y A_2 con la siguiente propiedad:

Para todo $a \in A_1$, y para todo $b \in A_2$ se cumple $a < b$.

Veamos algunos ejemplos de cortaduras:

1) Sea $A_1 = \{x/x \leq 3/2\}$ *y* $A_2 = \{x/x > 3/2\}$.

2) Sea $B_1 = \{x/x < 3/2\}$ *y* $B_2 = \{x/x \geq 3/2\}$.

Aunque desde el punto de vista conjuntista A_1 y B_1 serían diferentes y por lo tanto (A_1, A_2) y (B_1, B_2) son también diferentes, Dedekind, como lo veremos, las considerará esencialmente iguales.

Las anteriores cortaduras tienen la siguiente propiedad: existe un elemento mayor en la primera clase o un elemento menor en la segunda clase. Es decir, existe un elemento "separador" de las dos clases que es $\frac{3}{2}$.

A partir de las consideraciones anteriores podemos enunciar la siguiente definición: una cortadura es producida por un número racional si posee la propiedad de que existe un elemento mayor en la primera clase o un elemento menor en la segunda clase. Pero, la fortaleza del instrumento cortadura consiste en la posibilidad de exhibir cortaduras que no son producidas por números racionales. Dedekind demuestra la existencia de infinitas cortaduras con esta característica, a través de la elección de un entero no cuadrado perfecto D de la siguiente forma:

$$A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+/x^2 < D\}; \quad A_2 = \{x \in \mathbb{Q}^+/x^2 > D\}$$

Veamos un ejemplo: $A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}/x^2 < 2\}; \quad A_2 = \{x \in \mathbb{Q}^+/x^2 > 2\}$

Mostremos que (A_1, A_2) efectivamente es una cortadura:

Sea $a \in A_1$. Si $a \in \mathbb{Q}^-$ claramente $a < b$, para todo $b \in A_2$; en otro caso $a^2 < 2$ y si $b \in A_2$, entonces tenemos la desigualdad: $a^2 < 2 < b^2$. En cuyo caso podemos concluir que $a < b$.

Ahora se debe probar que si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $x \in A_1$ ó $x \in A_2$.

Como sabemos que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, entonces si $x \in \mathbb{Q}^{+}$, entonces $x^2 < 2$ o $x^2 > 2$ en cuyo caso $x \in A_1$ ó $x \in A_2$, respectivamente, y si $x \in \mathbb{Q}^{-}$ entonces $x \in A_1$.

Ahora vamos a probar que esta cortadura no es ***producida*** por un número racional. Veamos que no existe en A_1 un elemento mayor:

Sea $x \in A_1$ y supongamos $x > 0$ (si $x \leq 0$, entonces $y = \frac{1}{2}$ es tal que $x<y$, $y^2 < 2$).

Tómese,

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + x.$$

i) Como $x \in A_1$, $x^2 < 2$, entonces:

$$y - x = \frac{2-x^2}{4} > 0.$$

Por lo tanto $y > x$.

ii) Probemos ahora que $\left(x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 < 2$

Al efectuar las operaciones debemos resolver la siguiente desigualdad:

$$z = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x - 28 < 0$$

El anterior polinomio se puede factorizar así:

$$z = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x - 28 = (x^2 - 2)\,(x^2 - 8x + 14)$$

Si $x^2 < 2$ entonces $z < 0$ porque el factor $(x^2 - 8x + 14) < 0$.

En efecto $(x^2 - 8x + 14) = (x - 4)^2 - 2$, y si $x^2 < 2$, entonces $(x - 4)^2 - 2 > 0$. Por lo tanto $y \in A_1$. Igualmente se puede probar que si $x \in A_2$, existe $y \in A_2$ tal que $y < x$.

Este es el camino que permite cristalizar lo que hemos denominado creación de los números irracionales: allí donde se define una cortadura no producida por un número racional, Dedekind *decide* la existencia de un número irracional[7]. Esta decisión es de carácter lógico. Luego, es necesario definir las condiciones que garanticen la consistencia de esta creación. Particularmente, definir una verdadera extensión. Entendemos por extensión el acto que permite pasar de un dominio, bien definido estructuralmente, a otro

7 Aunque Dedekind no ilustra otro tipo de cortaduras sino aquellas relacionadas con raíces cuadradas, podemos ofrecer otro ejemplo de cortadura (A_1, A_2), específicamente aquella que corresponde al número irracional e:

$$A_1 = \left\{x \in Q / x \leq \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}, para\ algún\ k \in N\right\};\ \ A_2 = A_1{}^{c}$$

más rico e igualmente bien definido, que conserva intacta la estructura del primero.

Definición de un orden en el nuevo dominio

Con los desarrollos anteriores Dedekind está preparado para afirmar que una cortadura (A_1, A_2) sobre los números racionales define un número α racional o irracional según que la cortadura sea o no producida por un número racional.

Dedekind señala que la cortadura (A_1, A_2) que define el número α queda completamente determinada cuando se conoce cualquiera de las dos clases. Por ejemplo, si se conoce la primera clase A_1, entonces la segunda se define como la clase que comprende todos los números racionales que no pertenecen a A_1. Otra condición es que si un número *a* pertenece a la primera clase A_1, entonces todo número *b* menor que *a*, pertenece también a la primera clase. Y si un número *c* pertenece a la segunda clase, entonces todo número *d* mayor que *c* pertenece también a la segunda clase. Con lo anterior se va a definir un orden para los nuevos objetos de la siguiente manera:

Sean (A_1, A_2) y (B_1, B_2) dos cortaduras que producen los números α y β respectivamente. Definir un orden entre α y β (es decir $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$), es establecer una comparación entre las dos cortaduras, que, por lo dicho anteriormente, se reduce a comparar los dominios A_1 y B_1.

Para definir $\alpha = \beta$ se tienen dos opciones:

- Si $A_1 = B_1$ entonces todo elemento de A_1 es elemento de B_1, y recíprocamente todo elemento de B_1 es elemento de A_1 Por lo tanto, $A_2 = B_2$ y las cortaduras resultan ser idénticas.
- Si las cortaduras no son idénticas pero son esencialmente iguales; es decir, hay un único número que pertenece a A_1 y no pertenece a B_1[8]

Para definir $\alpha > \beta$ o $\beta < \alpha$ se tiene:

- Sean (A_1, A_2) y (B_1, B_2) las cortaduras correspondientes a α y β respectivamente. Supongamos que hay al menos dos números a_1 y a_2 que pertenecen a A_1 y no pertenecen a B_2. Entonces, por la propiedad de densidad $\mathbb{Q}$, hay infinitos números a_i que pertenecen a A_1 y no perte-

[8] Supongamos que existe un único número $\alpha_1 = \beta_1$ que pertenece a la clase A_1 y no pertenece a B_1**.** Si $\boldsymbol{b} \in B_1$, entonces $b < \alpha_1 = \beta_2$. Si $a \in A_1$, entonces $a \in B_1$. Por lo tanto, $\alpha < \alpha_1 = \beta_2$, lo cual significa que $\alpha_1 = \beta_2$ es el mayor número de A_1 y se puede afirmar que la cortadura (A_1, A_2) es producida por el número $\alpha_1 = \beta_2$. Ahora, respecto a la cortadura (B_1, B_2), se sabe que si $\boldsymbol{b} \in B_1$, entonces $\boldsymbol{b} \in A_1$ y, por lo tanto, $b < \alpha_1 = \beta_2 \in B_2$. Pero cualquier otro número $c \in B_2$ es mayor que $\alpha_1 = \beta_2$, porque si no, sería también menor que α_1 y pertenecería a la clase A_1; y, por lo tanto, pertenecería a B_1. Por esta razón $\alpha_1 = \beta_2$ es el menor de la clase B_2 y, entonces, la cortadura (B_1, B_2) es producida por el número $\alpha_1 = \beta_2$.

necen a B_1. En este caso esas cortaduras son esencialmente diferentes y se define $\alpha > \beta$.

Cabe recordar que hasta aquí no están los números reales ya estructurados y, por lo tanto, no tendría sentido definir cortaduras producidas por números irracionales **como**

$$A_1 = \left\{x\,/x \leq \sqrt{2}\right\} y\, A_2 = \left\{x/x > \sqrt{2}\right\}$$

pues en esta etapa $\mathbb{R}$ aún está en proceso de estructurarse como un dominio de números con unas propiedades determinadas. Por esta razón la escritura anterior no tendría aún sentido. Justamente, estamos definiendo ese orden para los nuevos objetos; entonces, con la expresión "$x < \sqrt{2}$", en el caso anterior, incurriríamos en un error lógico.

Extensión a partir de $\mathbb{Q}$

Un hecho epistemológico fundamental para Dedekind es garantizar la permanencia de la estructura de orden de $\mathbb{Q}$, como subdominio del nuevo dominio $\mathbb{R}$. Esta es la fortaleza de la extensión. Entonces, si se retoma el caso $\alpha < \beta$, por ejemplo, y si suponemos que α es una cortadura (A_1, A_2) producida por el número racional α, y (B_1, B_2) es la cortadura que corresponde a β, Dedekind debe garantizar que ese número α pertenece a la primera clase B_1. Efectivamente, por la desigualdad podemos garantizar que existe un $\delta \geq \alpha$ que pertenece a A_2 y $\delta \in B_1$; entonces $\alpha \in B_1$. De la misma manera se puede garantizar que si

$$\alpha < \beta \text{ y } \beta \text{ es racional, entonces } \beta \in A_2.$$

Veamos por qué Dedekind debe garantizar lo anterior: él considera dos niveles de existencia de los números racionales. En la desigualdad anterior $\alpha < \beta$, el número racional α se encuentra en el nivel de existencia como cortadura. Pero α en el nivel de existencia anterior, es decir como número racional, debe pertenecer a una de las clases B_1, B_2. Entonces, se debe probar que α pertenece efectivamente a una de ellas. Y, además, que esté en la primera B_1, pues de lo contrario su "ubicación" en la recta llevaría a la desigualdad $\alpha > \alpha$. Esto significaría que α como cortadura, es decir, como objeto del nuevo dominio de existencia conformado por racionales e irracionales, no coincide con α que pertenece al dominio exclusivo de los racionales. En otras palabras, que la extensión sería caótica; en nuestro lenguaje, no habría extensión. Dedekind culmina este razonamiento con la siguiente afirmación:

> Uniendo ambas consideraciones se obtiene el siguiente resultado: si una cortadura (A_1, A_2) es producida por el número α, cualquier racional pertenece

> a la clase A_1 o A_2, según sea mayor o menor que α; si el propio número α es racional puede pertenecer a una u otra clase (Dedekind, 1998, p. 89).

Este párrafo resume la compatibilidad de la extensión de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ y se puede interpretar así:

Si (A_1, A_2) es una cortadura producida por un número α (que puede ser racional o irracional) se garantizan las dos condiciones siguientes:

i. Si $\beta \in \mathbb{Q}$ entonces $\beta \in A_1$ o $\beta \in A_2$, dependiendo de si $\beta < \alpha$ o $\beta > \alpha$.
ii. Si el número α es racional puede pertenecer a una u otra clase.

Lo anterior permite a Dedekind cerrar el acto de extensión con las condiciones que conservan la propiedad de densidad: si $\beta < \alpha$ entonces en A_1 existen infinitos números racionales que no pertenecen a B_1. Esto implica que existen infinitos números racionales distintos de α y β, los cuales son menores que α y mayores que β, en la medida en que cada uno pertenece a A_1 y B_2. En resumen, lo que nos dice Dedekind es que entre dos números reales se puede garantizar la existencia de infinitos números reales, en virtud de las cortaduras producidas por números racionales.

$\mathbb{R}$ COMO UN DOMINIO UNIDIMENSIONAL TOTALMENTE ORDENADO Y CONTINUO

Con lo anterior Dedekind ha garantizado la estabilidad de $\mathbb{Q}$ en el nuevo dominio $\mathbb{R}$ y está preparado para afirmar que este nuevo sistema satisface las propiedades que posee el primero. Es decir, $\mathbb{R}$ posee las propiedades de transitividad[9], densidad y cortadura. No obstante, hay un principio indispensable que debe garantizar Dedekind en $\mathbb{R}$ y sin el cual su construcción no tendría sentido: el axioma de la continuidad. Enunciemos esta propiedad:

> Si el sistema $\mathbb{R}$ de todos los números reales se descompone en dos clases A_1, y A_2 tales que todo número α_1 de la primera clase A_1 es menor que todo número α_2 de la segunda clase A_2, existe un y sólo un número α mediante el cual se produce esa división (Dedekind, 1998, p. 90).

En primer lugar, la descomposición del sistema $\mathbb{R}$ en las dos clases A_1 y A_2 produce a la vez una cortadura sobre los racionales (A_1, A_2), definida de

9 Aunque Dedekind no demuestra estas propiedades sino que las deja como ejercicio para el lector, nosotros, a manera de ejemplo, demostraremos la primera propiedad:

Si $\alpha > \beta$ *y* $\beta > \gamma$ *entonces* $\alpha > \gamma$

Demostración: en primer lugar asociemos α, β, γ a las cortaduras respectivas:

$$\alpha \to (A_1, A_2);\ \beta \to (B_1, B_2);\ \gamma \to (C_1, C_2)$$

Si $\alpha > \beta$ entonces existen α', α'' que pertenecen a A_1 y no pertenecen a B_1. Es decir α', α'', pertenecen a B_2. Como $\beta > \gamma$ entonces existen β', β'' tales que $\beta', \beta'' \in B_1$ y $\beta', \beta'' \in C_2$. Ahora demostremos que $\alpha', \alpha'' \in C_2$, con lo cual queda probado que $\alpha > \gamma$: efectivamente, como $\beta', \beta'' \in B_1$ y $\beta', \beta'' \in C_2$, entonces $\alpha', \alpha'' > \beta', \beta''$. Por lo tanto $\alpha', \alpha'' \in C_2$.

tal manera que en A_1 se hallan todos los racionales de la clase A_1, y en A_2 todos los racionales de A_2. Esta cortadura es generada por un número α. Lo que se quiere mostrar es que α produce la descomposición del sistema ℝ en A_1, y A_2. Efectivamente, sea $\beta < \alpha$, entonces, por la propiedad de densidad, existen infinitos números c tal que $\beta < c < \alpha$. Por lo tanto, c pertenece a A_1. Y como $\beta < c$, entonces β pertenece a A_1, ya que todo miembro de A_2 es mayor que todo miembro de A_1. De la misma manera, se puede mostrar que si $\beta > \alpha$, entonces β pertenece a A_2. Así se muestra que cualquier número $\beta \neq \alpha$ pertenece o bien a A_1 o bien a A_2, dependiendo de si es menor o mayor que α, respectivamente. Y este número α es o bien el mayor de una clase o el menor de la otra, y evidentemente es el único que tiene esta propiedad.

Operaciones con números reales

Una vez ofrecidas las condiciones esenciales que garantizan la extensión y por ende la existencia del nuevo dominio ℝ, sólo resta a Dedekind definir las operaciones correspondientes. Las operaciones en los reales también las fundamenta a partir de cortaduras sobre números racionales.

La igualdad $\alpha + \beta = \mu$ está asociada a las cortaduras siguientes:

$$\alpha \rightarrow (A_1, A_2)$$
$$\beta \rightarrow (B_1, B_2)$$
$$\mu \rightarrow (C_1, C_2)$$

Como las dos primeras cortaduras están dadas, basta definir la cortadura μ de la siguiente manera:

$$C_1 = \left\{x \in \frac{\mathbb{Q}}{x} \leq a + b, \text{ para algún } a \in A_1 \text{ y algún } b \in B_1\right\},\ C_2 = \mathbb{Q} - C_1$$ [10]

[10] Veamos un ejemplo donde α y β son racionales y están definidos respectivamente por las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2), donde:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Q}/x \leq -2\} \text{ y } A_2 = \mathbb{Q} - A_1$$
$$B_1 = \{x \in \mathbb{Q}/x < 5\} \text{ y } B_2 = \mathbb{Q} - B_1$$

Entonces $a + \beta = \varphi$. Como podría esperarse, φ está definido por la cortadura (C_1, C_2):

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Q}/x < 3\} \text{ y } C_2 = \mathbb{Q} - C_1$$

En este sencillo ejemplo nos podemos dar cuenta de que efectivamente si α y β son producidas por números racionales, su suma concuerda con la suma usual entre estos números.

Veamos otro ejemplo donde uno de los dos miembros de la operación $\alpha + \beta$ es irracional: Sean $\alpha = \sqrt{2}$ y $\beta = 3$, es decir las cortaduras (A_1, A_2) Y (B_1, B_2) respectivamente, definidas así:

$$A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}/x^2 < 2\} \text{ y } A_2 = \mathbb{Q} - A_1$$
$$B_1 = \{x \in \mathbb{Q}/x \leq 3\} \text{ y } B_2 = Q - B_1$$

Entonces $\alpha + \beta = \varphi$, y φ está definido por la cortadura (C_1, C_2):

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Q}/x < 3 \ y\ (x-3)^2 > 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q}/(x-3)^2 < 2\} \text{ y } C_2 = \mathbb{Q} - C_1$$

Llamamos la atención sobre el hecho de que en esta definición de suma de números reales, los elementos $c \in C_1$ satisfacen la condición de que existen $a \in A_1$ y $b \in B_1$ tales que $a + b \geq c$.

Igualmente se puede definir la diferencia de dos números reales α, β, de la manera usual[11]:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Para ello sólo nos bastaría para un número β definir su opuesto aditivo $-\beta$:

Sea $\beta = (B_1, B_2)$ y vamos a suponer que $\beta > 0$. Entonces $-\beta$ estará asociado a la cortadura (C_1, C_2) definida así:

$$C_1 = A_1 - \{x \in \mathbb{Q} / |x| \in A_1\} \text{ y } C_2 = \mathbb{Q} - C_1$$

Ahora, si $\beta < 0$ entonces $-\beta$ estará asociado a la cortadura (C_1, C_2) definida así:

$$C_1 = A_1 \cup \{x \in \mathbb{Q} / -|x| \in A_2\} \text{ y } C_2 = \mathbb{Q} - C_1$$

Ahora complementemos el marco operatorio que fundamenta Dedekind para los reales ofreciendo las condiciones generales del producto entre reales para algunos casos; los restantes se dejarán como ejercicio al lector.

Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ están asociados respectivamente a las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2), el producto $\alpha.\beta = \delta$ se define mediante la cortadura $(C_1, C_2) = \delta$:

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Q} / x \leq a.b, \textit{ para algún } a \in A_1 \textit{ y } b \in B_1\} \text{ y } C_2 = \mathbb{Q} - C_1$$ [12]

Es notable que las definiciones de algunas operaciones puedan resultar abstrusas. En este sentido, Dedekind llama la atención en el hecho de que para definir de manera más sencilla las operaciones posibles en la nueva estructura $\mathbb{R}$, es preciso definir de manera adecuada algunas nociones o

11 Para definir la diferencia a partir de cortaduras se debe tener en cuenta la manera de caracterizar un número real positivo y negativo: $\alpha \in \mathbb{R}^-$ para α definido por (A_1, A_2), si existe en A_2 al menos un número racional negativo. Y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, para α definido por (A_1, A_2), si existe en A_1 un número racional positivo.

12 Veamos el caso donde $\alpha = \sqrt{2}$ y $\beta = \sqrt{3}$ definidas por las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2), respectivamente.

$$A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+ / x^2 < 2\} \text{ y } A_2 = \mathbb{Q} - A_1,\ B_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+ / x^2 < 3\} \text{ y } B_2 = \mathbb{Q} - B_1$$

Dedekind al final de su artículo llama la atención sobre el hecho de que hasta este momento no había una definición rigurosa de la igualdad $\sqrt{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Lo que bastaría demostrar para probar esta igualdad es que si definimos $\delta = \sqrt{2}, \sqrt{3}$, donde $(C_1, C_2) = \delta$. De acuerdo con la definición precedente tenemos que:

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Q} / x \leq a.b, \textit{ para algún } a \in A_1 \textit{ y algún } b \in B_1\} \textit{ y } C_2 = \mathbb{Q} - C_1$$

Definamos ahora $\sqrt{6} = (D_1, D_2)$: $D_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+ / x^2 < 6\}$ y $D_2 = \mathbb{Q} - D_1$

Sólo quedaría por probar que las dos cortaduras son idénticas. Es decir, que $C_1 = D_1$ y $C_2 = D_2$.

conceptos del análisis infinitesimal tales como *intervalo*, *magnitud variable*, *valor límite* y *función*[13].

LA COMPLETEZ TOPOLÓGICA COMO GARANTÍA LÓGICA DEL ANÁLISIS INFINITESIMAL

Con las nociones de *intervalo*, *magnitud variable* y *valor límite*, Dedekind cierra el proceso de objetivación de $\mathbb{R}$, exhibiendo la completez topológica, como la propiedad que colma los vacíos lógicos del análisis infinitesimal. En este sentido, una buena manera de hacer visible el alcance y fecundidad de lo que él quiere mostrar es retomar el problema con el que abrimos esta investigación: el teorema del valor intermedio en Cauchy. Este escenario pone de relieve la potencia epistemológica de la creación de Dedekind.

Para Dedekind un intervalo se expresa de la forma (α, β), que en nuestra notación conjuntista sería $A = \{x \in \mathbb{R}/\alpha < x < \beta\}$. Esta expresión le permite hacer visible la noción de cortadura en la definición de intervalo: notemos que si tenemos dos números α y β, α < β, ellos dividen a $\mathbb{Q}$ en tres clases determinadas por las cortaduras $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$. La primera clase estaría conformada por A_1, la tercera por B_2 y la segunda, que denotaremos por ϕ, la podemos definir como: $x \in \phi$ si y sólo si $x \in A_2$ y $x \in B_1$. Ahora sí se puede justificar y extender la notación (α, β) a $\mathbb{R}$ de la manera como lo expresábamos arriba, es decir:

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}/\alpha < x < \beta\}$$

Esta caracterización de un intervalo en términos de cortaduras, permite a Dedekind explicar qu**é** significa que una cantidad varíe en ese intervalo o en el dominio $\mathbb{R}$. Y más específicamente, que una magnitud varíe de manera constante hacia un valor límite fijo. Porque este comportamiento de una cantidad exige una condición irreducible: que el espacio donde ella discurre sea de una cierta forma o naturaleza. Específicamente y en términos modernos, que si $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, entonces se está garantizando que el espacio es completo. Esa es la garantía que Dedekind quiere ofrecer con la creación de $\mathbb{R}$.

13 A manera de complemento veamos cómo podría definir Dedekind algunas operaciones elementales, como la operación $\sqrt{a}$ y, de manera más general, $\sqrt[n]{a}$ donde $a \in \mathbb{Z}^+$:
Sea $\sqrt{a}$ la cortadura definida por (A_1, A_2):

$$A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+/x^2 < a\} \text{ y } A_2 = \mathbb{Q} - A_1.$$

Ahora, sea $\sqrt[n]{a}$ la cortadura definida por (A_1, A_2):

$$A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}^+/x^n < a\} \text{ y } A_2 = \mathbb{Q} - A_1.$$

Si nos ubicamos de nuevo en los orígenes del problema, planteado al inicio de este capítulo, esta garantía es la que Cauchy no puede ofrecer cuando supone que el límite de una sucesión existe si y sólo si es una sucesión fundamental. Es decir, $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m \geq N$, entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Recordemos que para Cauchy es posible mostrar rigurosamente la primera implicación, sin embargo, la proposición recíproca se asumía como un *a priori*. Esta presunción constituye un pilar fundamental en todo el cálculo y el análisis de Cauchy.

Lo anterior, que es lo que hemos exhibido como un vacío lógico en el razonamiento de Cauchy, Dedekind lo formula de dos formas equivalentes. La primera nos dice que "*si una magnitud x crece constantemente, pero no más allá de todo límite, entonces tiende hacia un valor límite*". Si la expresamos en términos de sucesiones, nos dice que si una sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada tiene un límite. Recordemos que Cauchy llega a este resultado en su demostración del teorema del valor intermedio. La segunda, nos dice que *si en el proceso de variación de magnitud x se puede siempre indicar para cada magnitud positiva δ dada un lugar correspondiente a partir del cual x varía en una cantidad inferior a δ, entonces x tiende hacia un valor límite*. En un lenguaje moderno decimos que si $\{x_n\}$ es una sucesión fundamental, entonces $\{x_n\}$ tiene un límite L. A esta forma apela el mismo Cauchy para establecer un criterio de convergencia para una serie. Dado que ambas formas son equivalentes, nosotros demostraremos sólo la primera forma; es decir, que si una sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada ella tiene un límite[14]:

Por hipótesis existe θ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, |x_n| < \theta$. Ahora Dedekind va a construir una cortadura sobre los números reales de la siguiente manera:

$$A_2 = \left\{ \frac{\alpha}{\forall n} \in \mathbb{N},\ |x_n| < \alpha \right\} \text{ y } A_1 = \mathbb{R} - A_2$$

Caractericemos los números que están en A_1: $\beta \in A_1$ si y sólo si para algunos valores de n $x_n > \beta$. Efectivamente, (A_1, A_2) es una cortadura sobre los reales porque si $\alpha \in A_1, \beta \in A_2$, entonces $\alpha < \beta$. Por el principio de continuidad, Dedekind puede garantizar la existencia de un único número real ζ, que es o bien el mayor de A_1 o el menor de A_2. El primer caso no puede suceder puesto que la sucesión definida es estrictamente monótona, entonces ζ es el menor número de A_2. Ahora sólo faltaría probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \zeta$, pero esto resulta del hecho de que dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $\alpha \in A_1$ tal que $\alpha < x < \zeta$, con $\zeta - \alpha < \varepsilon$.

14 Conviene aclarar que en su demostración Dedekind no hace uso de la notación de sucesión, porque él está pensando en un dominio de variación que no necesariamente es discreto. Por cuestión de comodidad lo haremos con esta simbología, entendiendo que se puede generalizar a magnitudes que varían continuamente.

Finalmente hemos ofrecido una caracterización de la construcción de los reales de Dedekind mostrando distintos niveles y momentos lógicos que intervinieron en este acto epistémico. Cada uno de ellos merece un tratamiento más amplio del que aquí ha sido posible, pero nuestra intención ha sido mostrar cómo gran parte de este andamiaje queda oculto en el tratamiento escolar y cómo algunas dificultades en el proceso de aprendizaje de $\mathbb{R}$ pueden asociarse a la complejidad inherente del objeto y hacerse visibles mediante una exhibición de su proceso de constitución, como el que hemos propuesto.

Bibliografía

Aristóteles (1973). *Obras completas.* Madrid: Aguilar.

Aristóteles (1998). *Física.* Madrid: Planeta DeAgostini.

Aristóteles (1999). *Metafísica.* Madrid: Planeta DeAgostini.

Belna, J. P. (1996). *La notion de nombre chez Dedekind.* París: París: J. Vrin. Librairie Philosophique.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito.* México, D.F.: Servicios de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Boniface, J. (2002). *Les Constructions des Nombres Réeles dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse.* París: Ellipses.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis.* México, D.F.: Servicios de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie Mathématique.* París: Hermann.

Caveing, M. (1998). *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'a Euclide.* París: Presses Universitaires du Septentrión.

Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza.

Euclides (1991). *Elementos (Libros I-VI).* Madrid: Gredos.

Gálvez, F. (2000). *El infinito en Aristóteles: Un estudio desde el libro III de la Física.* Cali: Monografía, Universidad del Valle.

Gardies, J. L. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique.* París: Librería filosófica J. Vrin.

Heath, T. (1956). *Euclid. The thirteen books of the Elements (Books III-IX).* New York: Dover Publications.

Lakatos, I. (1978). *Matemáticas, Ciencia y Epistemología.* Madrid: Alianza.

Panza, M. (2002). *Continuidad local aristotélica y geometría de Euclides: la construcción de un ángulo recto.* En: Álvarez, C. y Barahona, A. (Comps.) La continuidad en las ciencias. Mexico, D. F.: UNAM y Fondo de Cultura Económica, pp. 37-120.

Panza, M. (1992). *De la continuité comme concept au continu comme objet*. En J.M. Salanskis y H. Sinaceur (comps.), Le labyrinthe du continu. Paris: Springer-Verlag, pp. 16-30.

Capítulo 6

LA NOCIÓN DE VECINDAD EN LA APROPIACIÓN DE LOS REALES

Maribel Anacona[1]
Guillermo Ortiz[2]

Introducción

Existen básicamente dos formas de presentar el conjunto de los números reales en los textos de cálculo y análisis de los primeros años de universidad, a través de una construcción o de una exhibición axiomática de sus propiedades. Esta última es tal vez la forma más usual de exponer los reales en los textos de enseñanza. Se parte de la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ de objetos, llamados números reales, en el que se verifican los axiomas algebraicos y de orden que posee un cuerpo numérico, más el axioma de completez. Varios autores consideran que es el modo más sencillo de presentar los reales, pues para su construcción se requiere de conceptos y métodos que generalmente no son tratados a fondo en los últimos años de la educación media y que pueden resultar tan complejos como el mismo conjunto $\mathbb{R}$; nos referimos, por ejemplo, a los conceptos de continuidad, límite y convergencia de sucesiones.

Un estudio moderno de las construcciones típicas de los números reales, en el que se privilegien las ideas de base, las relaciones conceptuales y la lógica misma de la construcción, puede ayudarnos no sólo a comprender

---

1 Profesora del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle – Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle

2 Profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle – Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle

el papel de los conceptos de límite y convergencia en el proceso mismo de construcción, sino a identificar el rol epistemológico y pedagógico de una noción que consideramos esencial para la comprensión del continuo numérico: se trata de la noción de vecindad. En la sencillez y potencia de esa noción topológica intentaremos centrar nuestra atención.

Para este análisis es importante tener presente que las nociones de límite, convergencia y continuidad son mucho más antiguas que la noción de vecindad. Los orígenes de estos tres conceptos se remontan a la antigüedad griega; se pueden ubicar trazos primigenios en las obras de Aristóteles, en los *Elementos* de Euclides y en los trabajos de Arquímedes y Eudoxo; mientras que la noción de vecindad, aunque empieza a emerger a mediados del siglo XIX, gracias a los trabajos de Riemann, Weierstrass y otros, se ubica más claramente y de manera formal, a comienzos del XX, con los trabajos de Hilbert, Root, Riesz, Fréchet y Hausdorff.

En esta historia de más de veinte siglos hay una época que merece una mención especial. Se trata de principios del siglo XIX, momento en que matemáticos como Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet y Weierstrass hacen un esfuerzo muy importante por fundamentar, desde la aritmética, los conceptos básicos del análisis. El estudio cuidadoso de las propiedades de las funciones fue iniciado por Bernhard Bolzano, quien en 1817 ofreció por primera vez una definición de continuidad, sin hacer consideraciones de tipo geométrico o intuitivo. En 1821 Cauchy, en su obra *Cours d'analyse algébrique,* definió particularmente las nociones de límite y continuidad en términos estrictamente numéricos[3]. Con los trabajos de Cauchy se dio un paso fundamental en el camino hacia el rigor del análisis[4]. Sin embargo, faltarían unas décadas para precisar algunos conceptos y advertir que algunas consideraciones sobre la continuidad que circulaban a principio de siglo no eran correctas[5].

Los trabajos de Weierstrass se pueden ubicar en la cima de este proceso

---

3 a) En relación con el límite, Cauchy dice en su *Cours d'analyse*: "cuando los valores sucesivos asignados a una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo de modo que terminan por diferir de él por tan poco como se desee, este último es llamado el límite de los otros. Así por ejemplo, un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él" (Cauchy, 1994, p. 76).

b) En esta obra se encuentra también la definición de continuidad de una función: "la función f(x) permanecerá continua con respecto a x entre los dos límites dados, si, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma" (Cauchy, 1994, p. 90).

4 Otros trabajos de Cauchy sobre los fundamentos del análisis son los siguientes: *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (1823) y *Leçons sur le calcul différentiel* (1829).

5 Cauchy planteó en su *Cours d'analyse* la siguiente afirmación: "si una función de varias variables es continua en cada una por separado, entonces es una función continua de todas las variables". Unos años después Darboux ofreció un contraejemplo.

de rigorización. Sus trabajos adelantados entre 1841 y 1856 se empezaron a conocer en 1859 como profesor en la Universidad de Berlín. Weierstrass excluyó cualquier participación intuitiva del tiempo o del movimiento en la noción de variable[6], considerándola como una letra que se usa para denotar cualquier valor de un conjunto dado. Con esta definición eliminó las posibles imprecisiones, en las definiciones de Bolzano y Cauchy, en relación con la continuidad y el límite de una función. Las definiciones de Weierstrass sobre continuidad y límite de una función $f(x)$ en un punto dado $x = a$, son las que conocemos en la actualidad y las veremos en la segunda parte de este capítulo.

La noción de vecindad, por su parte, surge a finales del siglo XIX, gracias a la necesidad de extender ciertas propiedades de conjuntos conocidos como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$ a conjuntos abstractos, cuyos elementos son de naturaleza cualquiera. De un lado, se contaba con los decisivos avances en la fundamentación del análisis; y, de otro, se disfrutaba del paraíso creado por Cantor: la teoría de conjuntos. Se trataba entonces de aprovechar los resultados de la teoría de conjuntos para un tratamiento más abstracto de la teoría de funciones. Varias ramas de las matemáticas utilizaban transformaciones u operadores que actuaban sobre funciones, como la diferenciación o la integración que actúan sobre una función para producir otra, o el operador diferencial (de la teoría de ecuaciones diferenciales) que al actuar sobre una clase de funciones las transforma en otras funciones. Se pretendía entonces que estos operadores se estudiaran en el marco de una formulación más abstracta, donde las funciones podrían ser consideradas como elementos o puntos de un espacio.

La historia registra como el primer esfuerzo importante por construir una teoría abstracta de espacios de funciones, el llevado a cabo por Maurice Fréchet, en su tesis doctoral de 1906. En ella empleó los desarrollos de la teoría de conjuntos para el tratamiento de las funciones, que serían consideradas como los elementos de un conjunto dado. Era necesario introducir en los conjuntos abstractos una estructura de espacio mediante la definición de una relación cualquiera de proximidad entre los elementos; lo que condujo al estudio sistemático de los espacios abstractos[7].

6 Weierstrass criticó fuertemente la frase: “una variable se acerca a un límite”, por considerar que allí intervienen implícitamente las nociones de tiempo y movimiento.

7 En el libro *Las primeras investigaciones sobre los espacios topológicos* (Arboleda, 1980) se encuentra un amplio y detallado análisis de la historia de los orígenes de la topología de conjuntos y de la introducción de espacios topológicos más generales. En particular, estudia los espacios **L** y los espacios **V**, en los cuales la topología está definida respectivamente por el *límite* de sucesiones y por *vecindades*. La obra de Fréchet ocupa un lugar muy importante en esta historia, no sólo es el pionero en varios conceptos sino que la mayoría de los matemáticos que contribuyeron en los desarrollos de la topología estuvieron vinculados con él a través de importantes correspondencias, las cuales fueron estudiadas por primera vez por Arboleda.

En términos generales se puede decir que un espacio abstracto es un conjunto de puntos, en el que se ha definido una relación de cercanía entre los puntos del conjunto. Esta relación nos dice si dos puntos están próximos o no. No hay una forma única de establecer si dos puntos son cercanos. Lo importante de resaltar es que esta relación, que permite precisar el nuevo concepto de vecindad, nos ubica en el corazón de la Topología, una de las disciplinas más ricas de la modernidad.

Precisamente con la noción de cercanía o proximidad entre puntos, iniciamos la primera parte de este capítulo. Ella ofrece una entrada intuitiva a la noción de vecindad, la cual se formaliza luego para espacios métricos y abstractos. En la segunda parte del capítulo, mostramos rápidamente la relación existente entre los conceptos de límite, continuidad y vecindad. Para finalizar, hacemos una presentación comentada de las construcciones típicas de los números reales, por sucesiones de Cauchy y por cortaduras de Dedekind, en la que se observa el papel de las nociones de límite y convergencia de sucesiones y se identifica el rol epistemológico de la noción de vecindad en el proceso de construcción.

La noción de vecindad

La noción de vecindad es muy particular. Ella no constituye una operación entre dos elementos de un conjunto ni posibilita la comparación de orden entre ellos. La noción de vecindad, como su nombre lo indica, habla de puntos vecinos o próximos a un punto dado. En este sentido, en una vecindad, no interesa el punto en sí mismo sino el "lugar" constituido por los alrededores del punto, el punto con los puntos cercanos que lo rodean.

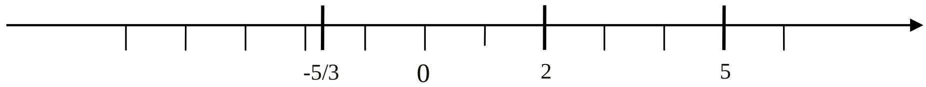
En primera instancia, podemos decir que una vecindad alrededor de un punto $\boldsymbol{x}$ está conformada por todos los puntos que son "próximos" a $\boldsymbol{x}$. Con el propósito de darle sentido preciso a esta definición, abordaremos en primer lugar el concepto físico de "proximidad". Para tratar este concepto o el de "cercanía", se requiere de la definición de distancia. Una vez definida tendremos por primera vez la noción matemática de vecindad.

La "proximidad" o "cercanía" entre dos puntos

Todas las cosas por grandes o pequeñas que sean, guardan relaciones de cercanía con el resto de los objetos. "La distancia entre la tierra y el sol es de 104 millones de km", "A distancias menores de 80 micrómetros de separación, las células se pueden tocar", son expresiones que dan cuenta de esta relación. Por lo tanto, para determinar si dos objetos del mundo real están "próximos" o no, necesitamos conocer la medida del espacio que los separa. Es decir, se requiere representar con un número real positivo a dicha separación; el cual nos dirá en términos cuantitativos qué tan "próximos" están los dos objetos. Este número mayor o igual a cero, da cuenta de la distancia que hay entre los dos objetos.

Si dos objetos están tan cercanos, que se "tocan", se dice que la distancia entre ellos es cero. Una distancia negativa no tiene sentido. De igual manera, la intuición nos dice que la distancia de un objeto A a un objeto B es la misma que de B a A.

Si nos ubicamos en la recta geométrica,



podemos decir que la distancia entre el 2 y el 5 es de 3 unidades; y entre el 2 y el $-5/3$ es $3 + 2/3$ unidades.

Esta forma de calcular la distancia, corresponde a la más usual. Es decir, la distancia entre dos puntos de la recta geométrica, se obtiene a través de la diferencia (positiva) entre los dos. Es decir, $d(x, y) = |x - y|$. Esta es la forma de concretar, en términos matemáticos, nuestra intuición sobre la noción de distancia. Sin embargo, es importante resaltar que no toda función da cuenta de nuestra intuición. Pensemos por ejemplo en una distancia definida en el conjunto de los números naturales por $d(x, y) = |4x - y|$. La distancia entre 25 y 100 sería 0; pero la distancia entre 100 y 25 sería 375. El 25 estaría infinitamente cerca de 100, mientras que el 100 estaría muy lejos del 25, lo cual no tiene sentido. Es decir, se debe cumplir que $d(x, y) = d(y, x)$.

Veamos qué ocurre si tomamos $d(\mathrm{x,y}) = (x - y)^2$ como una distancia, al comparar el viaje que realizan dos buses que hacen el trayecto Cali-Zarzal. Uno que realiza el viaje directo de Cali a Zarzal y otro que para en la ciudad de Buga. La experiencia nos dice que Buga está entre Cali y Zarzal, más o menos a mitad de camino. Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad, que si Buga está a una unidad de separación de Cali, Zarzal se encuentra a dos unidades. Entonces tenemos que $d\,(\mathrm{C, Z}) = (0-2)^2 = 4$, mientras que por otro lado $d\,(\mathrm{C, B}) = (0-1)^2 = 1$ y $d\,(\mathrm{B, Z}) = (0-1)^2 = 1$. Esto no corresponde con la realidad. Un viaje directo debe ser igual o más corto que uno con paradas intermedias. Es decir, se debe cumplir que $d\,(\mathrm{C, Z}) \leq d\,(\mathrm{C, B}) + d\,(\mathrm{B, Z})$.

Históricamente se le atribuye a Maurice Fréchet el planteamiento de la siguiente definición de distancia, la cual se ajusta a la intuición y a las necesidades matemáticas, y evita que se presenten casos extraños como los anteriores.

Sea X un conjunto. Se dice que d: X x X $\rightarrow \mathbb{R}$ define una **distancia** en X si se cumplen las propiedades:

1. $d\,(x, y) \geq 0$
2. $d\,(x, y) = d\,(y, x)$
3. $d\,(x, z) \leq d\,(x, y) + d\,(y, z)$ (desigualdad triangular)

Con esta generalización de la noción de distancia, Fréchet mostró en primer lugar que la propiedad que relaciona dos puntos no necesariamente es la distancia usual, y por lo tanto, existen otras maneras de establecer la cercanía. Y en segundo lugar, que esta relación de cercanía se puede establecer entre objetos de naturaleza cualquiera. Como lo mencionamos en la introducción, ahora puede tratarse perfectamente de puntos en $\mathbb{R}^n$, funciones, curvas, y otros objetos matemáticos de naturaleza cualquiera[8].

Un conjunto en el que se ha definido una distancia, se denomina espacio métrico, y habitualmente se usa referirse a la distancia como la métrica. Con los espacios métricos se obtiene una generalización importante de la geometría euclidiana. El espacio métrico más conocido por todos es el espacio euclidiano unidimensional con la distancia usual $(\mathbb{R}, d)$[9]. Es interesante pensar en otros espacios métricos y en las diversas posibilidades de definir una distancia[10].

Una vez establecida la distancia en un conjunto, estamos en condiciones de darle un significado más preciso a las expresiones de "cercanía" o "proximidad" entre los puntos del conjunto y por lo tanto en condiciones de definir más formalmente la noción de vecindad.

La vecindad en términos de distancia

Sea X conjunto cualquiera en el que se ha definido una distancia. Se llama vecindad de un elemento x de X, a cualquier subconjunto de X que contiene todos los elementos cuya distancia a x, es menor que un número positivo dado[11]. Más formalmente: Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos

---

8 Un análisis muy completo sobre la noción de espacio abstracto de Fréchet se puede consultar en Arboleda, L. y Recalde, L. (1999).

9 Otro espacio métrico muy utilizado es el espacio euclidiano bidimensional, con la distancia entre dos puntos $a=(x_1,y_1)$ y $b=(x_2,y_2)$, definida por: $d(a,b) = ((y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2)^{1/2}$

10 Como ejemplos de distancia y de espacio métrico, exhibimos los siguientes:

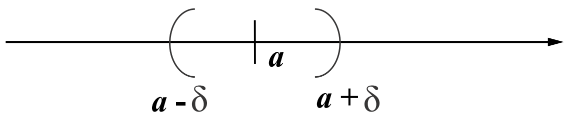
1) Sea X un conjunto cualquiera. Definamos d: $X \times X \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma: $d(x,y) = 0$ si $x = y$, y $d(x,y)=1$ si $x \neq y$. Esta distancia llamada *discreta*, separa a la misma distancia de 1 unidad, cada par de elementos del conjunto X. Un conjunto X con esta distancia, se conoce como *espacio métrico discreto*.
2) Sea X el conjunto de pueblos en un mapa escogido; si definimos $d(x,y)$ como la longitud del camino más corto entre todas las rutas que comunican a x con y, tenemos que d es una distancia.
3) En $X = \mathbb{R}$, consideremos las funciones $d_1(x,y) = \text{mín}(|x - y|, 1)$ y $d_2(x,y)= \text{máx}(|x - y|, 1)$. La función d_1 define una distancia, sin embargo d_2 no. Por lo tanto $(\mathbb{R}, d_1)$ es también un espacio métrico.

11 En la introducción al libro de Topología General (Bourbaki, 1965), Bourbaki no solo presenta una definición de la noción de vecindad sino que la ubica en el centro de la Topología y en la base de las nociones clásicas del análisis como límite y continuidad.

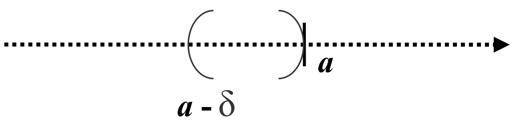
que $V \subseteq X$ es vecindad de $x \in X$ si y sólo si existe U tal que $x \in U \subseteq V$, donde $U = \{y \in X; d(x, y) < \varepsilon\}$ con $\varepsilon>0$.

Recordemos algunos sencillos ejemplos:

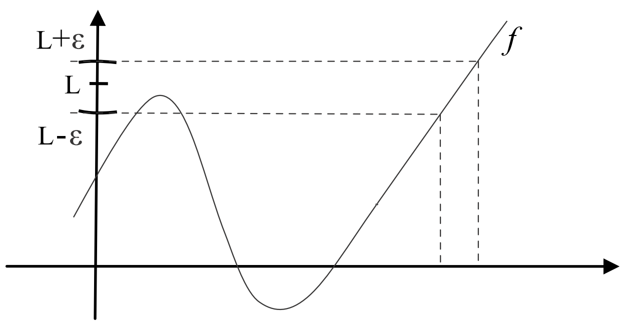
1. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Entonces las vecindades de un punto (número real) están dadas por intervalos que lo contengan. Si tenemos el número real a y queremos ver vecindades en torno a a, debemos identificar los puntos (números reales) están a una distancia de a menor que δ. Es decir, buscamos el conjunto de los números reales x que satisfacen la desigualdad $| x - a | < \delta$. Es decir, el intervalo $(a - \delta , a + \delta)$.



2. Pensemos en $\mathbb{Q}$ con la métrica usual. Sea a un número racional, la "vecindad por la izquierda" de a se define como el intervalo formado por todos los números racionales, que son muy cercanos a a pero que son menores que a. Es decir, el intervalo $(a - \delta , a) \cap \mathbb{Q}$. De manera análoga, se puede definir una "vecindad por la derecha" de a.



3. Pensemos en una función real f y en una vecindad para las imágenes alrededor de un valor L**.** Es decir, los elementos a considerar son sólo las imágenes de la función f. Por lo tanto, una vecindad de L estaría dada por todos los $f(x)$ tales que su distancia con L es menor que ε. Es decir, el conjunto de todos los números reales $f(x)$ tales que satisfacen la desigualdad $| f(x) - L | < \varepsilon$.

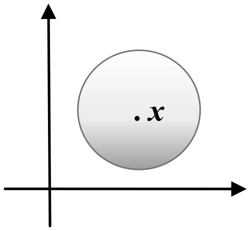


4. Imaginemos que nuestro universo son los números naturales $\mathbb{N}$, y que queremos determinar una vecindad alrededor de un número fijo,

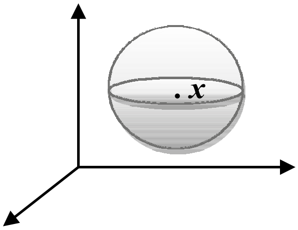
digamos 10’000.000. Pues bien, primero tenemos que decidir ahora cuál podría ser un número pequeño; si representamos por p la idea de un número pequeño (un número entre 2 y 9 por ejemplo), entonces la vecindad de 10’000.000 está formada por todos los números naturales entre 10’000.000 – p y 10’000.000 + p.

5. Sea el conjunto $\mathbb{N}$ y pensemos en un “punto infinito”, mayor que todos los números naturales (obviamente no corresponde a un número natural). Pensemos en una vecindad alrededor de dicho punto. Si hacemos uso de nuestra intuición no es difícil creer que entre más grandes sean los naturales más cerca estamos del punto infinito. Es decir, si representamos por M un número natural muy grande, entonces los puntos próximos al punto infinito son todos los números naturales mayores que M. Es decir, una vecindad en el “punto infinito”, que denotaremos como U_M, está dada por el conjunto de todos los números naturales mayores que dicho M.
6. Dado un espacio métrico (X, d) y un número real $\varepsilon > 0$, definimos las vecindades como las bolas abiertas con centro en x y radio ε, así: $B_\varepsilon(x) = \{y \ / \ d(x, y) < \varepsilon\}$

Si X = $\mathbb{R}^2$, las vecindades tienen la forma:



Si X = $\mathbb{R}^3$, las vecindades tienen la forma:



7. Por último, si pensamos en nuestro barrio, los vecinos son las personas que viven en nuestra cuadra o quizás en las manzanas circundantes. Sin embargo, si pensamos en nuestra ciudad, los vecinos son las personas que viven en nuestro barrio. Más aún, alguien en la capital nos pensara próximos a los habitantes de la ciudad, y para alguien por fuera del país estamos próximos a la gente de nuestro departamento. Quizás para alguien en lugar muy distante en nuestra antípoda estamos cercanos a todos los habitantes de nuestro país. En estos ejemplos intuitivos las métricas no son plenamente establecidas, aunque susceptibles de un buen entendimiento. En este mismo sentido, si consideramos todos los

habitantes de nuestro planeta con acceso a Internet, entonces podemos pensar que son próximos sin importar cuán distantes físicamente estén; aquí la métrica está medida por la inmediatez de comunicación que tienen mutuamente.

Como veremos a continuación las propiedades esenciales de las vecindades se verifican en casos más abstractos y generales y se pueden expresar independientemente de la noción distancia y de todo recurso a la intuición.

La noción abstracta de vecindad

Sabemos que una vecindad alrededor de un punto *x* está conformada por todos los puntos que son próximos o suficientemente próximos a *x*. Esta definición conlleva implícitamente la noción de distancia. Pero es posible establecer la noción de vecindad sin recurrir a la distancia. Este camino hacia la axiomatización de las propiedades que deben satisfacer los subconjuntos de un conjunto, llamados vecindades, para dar cuenta de la cercanía entre puntos, estuvo rico en propuestas metodológicas y nos permitiremos señalar muy someramente algunas de ellas.

Como ya lo habíamos mencionado, Fréchet fue el primero en plantear esta generalización y aplicarla en un conjunto de naturaleza cualquiera. El concepto de límite no quedaba definido explícitamente sino que estaba caracterizado por unas propiedades lo bastante generales que permitía incluir los distintos tipos de límites que aparecían en las teorías concretas que Fréchet quería unificar. Estos son los llamados espacios L de Fréchet[12].

Otro matemático que también hizo contribuciones importantes en la historia de la topología fue el húngaro Friedrich Riesz (1880-1956), quien caracterizó la relación de cercanía a través de los puntos de acumulación[13], estableciendo entre ellos ciertas condiciones previas[14]. Esta es una forma de

---

12 Se denomina espacio L de Fréchet a un conjunto de elementos cualesquiera, en el cual la convergencia de una sucesión $\{a_n\}$ está determinada por las siguientes condiciones:
i) Si $a_n = a$ (para n = 1,2,3….) entonces $lím \{a_n\} = a$
ii) Si $lím \{a_n\}$ es *a*, entonces *a* también es el límite de toda sub-sucesión infinita de $\{a_n\}$

13 Lindelöf introduce en 1903 el concepto de punto de condensación o punto de acumulación: "un punto *c* es un punto de condensación del conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$, si toda esfera con centro en el punto, tan pequeño como se escoja el radio, siempre contendrá una <u>infinidad no numerable</u> de puntos de P". Ver: Arboleda (1980, p. 18).

14 Riesz formuló los siguientes axiomas para los puntos de acumulación:
i) Si *x* es punto de condensación de un conjunto E y $E \subseteq F$, *x* es punto de condensación de F.
ii) Si *x* es punto de condensación de $E \cup F$, *x* es punto de condensación de E o de F.
iii) Si E es un conjunto que tiene un único elemento, no existe ningún punto de condensación de E.
iv) Si *x* es punto de condensación de un conjunto E y si $x \neq y$, existe al menos un conjunto F que tiene a *x* como punto de condensación sin tener a *y* como punto de condensación.

generalizar la noción de límite de una sucesión, pues se pasa de considerar un infinito numerable a uno no numerable.

El matemático americano E. H. Moore realizó también un interesante trabajo vía a la generalización de la noción de límite. En 1922 elabora, junto a su estudiante H. L. Smith, una teoría del límite generalizado diferente de la de Fréchet[15] y logra una caracterización particular de la topología del espacio. No vamos a entrar en los detalles de esta rica historia, pero vale la pena mencionar que este proceso de generalización de la noción de límite, culmina con la aparición de la noción abstracta de vecindad.

En este proceso histórico que conlleva a la noción abstracta de vecindad, debemos reconocer gracias al trabajo de Arboleda que, aunque tradicionalmente se le atribuye a Hausdorff el planteamiento de una axiomática general de las vecindades, existen varios matemáticos que abonaron el camino y que queremos rápidamente mencionar. Se trata particularmente de Root, quien desde 1911 venía trabajando en la idea de definir una relación en un conjunto abstracto P, por medio de una axiomatización conveniente de la noción de vecindad. Su intento consistía fundamentalmente en caracterizar el espacio abstracto por medio de relaciones de orden, en las que no interviniera la noción de distancia. Su trabajo tenía semejanzas con los anteriores de Hedrick y Hildebrant; sin embargo, fue él el primero en construir una teoría original, para el estudio de las relaciones topológicas en un espacio abstracto, sobre la base de la noción de vecindad[16]. Se puede mostrar que este sistema es equivalente al definido anteriormente por Riesz[17] y satisface los axiomas de los espacios L de Fréchet[18].

Root continuó su trabajo de generalización: consiguió simplificar su teoría de vecindades, introdujo la noción de "uniformidad" del espacio y finalmente obtuvo un sistema de tres postulados[19]. Arboleda en su trabajo

---

15 Arboleda (1980, p. 34).

16 En su trabajo de 1912 caracteriza la noción de vecindad por los cinco postulados siguientes:
i) Si R es una vecindad de *p*, entonces *p* es un elemento de R.
ii) Cada vecindad de un punto límite U contiene al menos un elemento además de U.
iii) Existe una sucesión de vecindades R_n asociada a cada *q*, tal que para toda vecindad R de *q*, existe un número m_R para el cual $m > m_R$ y $R_m \subset R$.
iv) Para cada vecindad R de *q*, existe una vecindad R_1 de *q* tal que si *p* es un punto de R_1, habrá una vecindad R_2 de *p* contenida en R.
v) Si $q_1 \neq q_2$, existen dos vecindades de q_1 y q_2 sin puntos comunes.

17 Los sistemas son equivalentes, siempre y cuando se defina el límite en las clases R de P, de la siguiente manera: *q* es un punto límite de $R_1 \subset P$, si cada clase R de *q* (que Root representa por R^q) contiene un elemento de R_1 distinto de *q*. La demostración se deja como ejercicio para el lector.

18 Esto se puede verificar bajo la condición de definir el límite como sigue: *q* es punto límite de $\{p_n\}$ si para toda clase R^q, existe un elemento de $\{p_n\}$ para el cual todos los términos siguientes de la sucesión pertenecen a R^q.

19 Estos tres postulados son: i) para cada elemento *q* de P, existe un segmento que lo contiene.
ii) Si S_1 y S_2 son segmentos de *q*, $S_1 \cup S_2$ es también segmento de *q*.
iii) Si q_1 y q_2 pertenecen a P, existen dos segmentos S_1 de q_1 y S_2 de q_2 tales que $S_1 \cap S_2 = \phi$

reconoce ampliamente la importancia de Root en lo relacionado con una caracterización axiomática de la noción de vecindad. Sin embargo, considera que por diversas razones, su obra no tuvo un lugar visible en la historia de la topología. Una razón de fondo es que Root no logró deducir un estudio de las propiedades topológicas de un espacio concreto en el que sus axiomas pudiesen aplicarse, hecho que sí se concretó con los trabajos de Hausdorff.

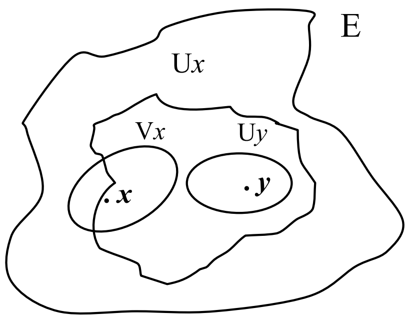
Es entonces el momento de mirar los axiomas de Hausdorff para las vecindades asociadas a los puntos x de un espacio abstracto E, propuesta que publicó en 1914[20]:

Los postulados son los siguientes:

1. Para todo $x \in$ E, existe una vecindad Ux y $x \in$ Ux,
2. La intersección de dos vecindades de x contiene una vecindad de x,
3. Si $y \in$ Ux, existe un Uy tal que U$y \subset$ Ux,
4. Si $x \neq y$, existen Ux y Uy tales que U$x \cap$ U$y = \phi$

Resulta un ejercicio interesante comparar estos postulados con los de Riesz y los de Root, e identificar cuáles son equivalentes, así como la ventaja de utilizar éstos en lugar de los anteriores. Vamos a analizar cada uno de ellos y tratemos de expresarlos en un lenguaje menos formal.

A) Sea E un espacio abstracto y x un punto de E. Imaginemos una vecindad alrededor de x, y la denotamos por Ux (y podríamos pensar incluso en infinitas vecindades alrededor de x). ¿qué podemos decir de x en relación con la vecindad Ux y con cada una de sus vecindades? Pues sencillamente que x está en cada una de ellas. Es decir, que el punto $x \in$ Ux para toda Ux. Dicho de otra manera, un punto pertenece a todas sus vecindades.



B) Ahora pensemos en dos vecindades Ux y Vx alrededor del mismo punto x. ¿Qué podemos decir en relación con la intersección de las dos vecindades? Resulta natural pensar que los puntos de U$x \cap$ Vx son también suficientemente cercanos a x. Es decir, que U$x \cap$ Vx es también una vecindad de x.

C) Consideremos una vecindad Ux de un punto y. Es posible encontrar otra vecindad Uy, contenida en Ux, de tal manera que Ux es vecindad de los puntos de Uy. Es decir, una vecindad alrededor de un punto es también vecindad de todos los puntos que están arbitrariamente cerca.

D) Alrededor de dos puntos distintos x y y, siempre es posible encontrar

[20] Se pueden ubicar los orígenes de esta axiomatización en los trabajos de Hilbert de 1902, quien planteó una formulación axiomática de la Geometría euclidiana plana.

vecindades Vx y Uy alrededor de cada uno de los puntos, que no tengan ningún punto en común.

Un conjunto E, en el que para cada punto x de E se ha definido una familia Ux de subconjuntos de E (vecindades) que satisface las cuatro propiedades anteriores, se considera dotado de una estructura topológica y se conoce formalmente como un espacio topológico.

En los espacios topológicos, de los cuales el espacio métrico es un caso particular, se goza de una herramienta teórica que permite hacer "cosas" que en otras circunstancias son imposibles de realizar. Es decir, en un conjunto en el que no se sabe cómo se "comportan" los puntos alrededor de uno dado, en el que no se conocen las vecindades de cada punto, no se puede pensar por ejemplo en el límite o en la convergencia de una sucesión. Estos conceptos requieren necesariamente de una definición de proximidad, de vecindad. Esta relación la recordaremos rápidamente en la siguiente sección.

Para concluir esta primera parte, es importante reconocer en este proceso histórico de construcción que, a partir del concepto vago e intuitivo de "proximidad" o "cercanía" entre dos puntos u objetos, se llegó por primera vez a la noción de vecindad. Pero una vez establecidos los espacios topológicos, es la noción estructura topológica, la que nos permite hablar formalmente de puntos muy "próximos" o "cercanos" a un punto dado. Es decir, esta noción de "proximidad" intuitiva en principio, al final de un proceso de abstracción y generalización de varias décadas, recobra no sólo su sentido y su importancia, sino que obtiene precisión y ciudadanía matemática.

Límite y continuidad en relación con la vecindad

A continuación intentamos mostrar que la noción de vecindad traza un camino más intuitivo y a la vez más abstracto que posibilita una mejor comprensión de los conceptos de límite, convergencia y continuidad.

Vecindad vs. Continuidad de una función

Los textos de cálculo o análisis exhiben generalmente la siguiente definición de continuidad puntual de una función en $\mathbb{R}$.

Una función f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es *continua* en un punto $x = a$ si y sólo si $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $\forall x\ (0< |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

Vale la pena mencionar que esta definición es exactamente la propuesta por Weierstrass alrededor de 1860. Comparemos esta definición con la de Cauchy propuesta en 1821 en su *Cours d'analyse:*

> La función $f(x)$ permanecerá *continua* con respecto a x entre los dos límites dados, si, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño de la va-

> riable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma (Cauchy, 1994, p. 90).

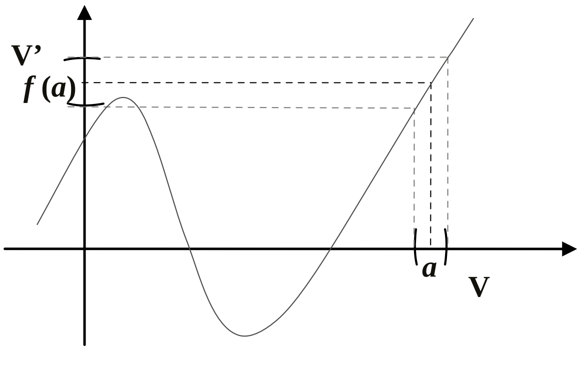
La diferencia es significativa, pues es predominante en la definición de Weierstrass el uso de un lenguaje simbólico y la incursión de los cuantificadores universal y existencial, en la búsqueda del rigor que caracterizó el siglo XIX. Sin embargo, debemos decir que esta definición frecuentemente presentada en los textos de enseñanza presenta algunas dificultades para su comprensión, las cuales han sido ampliamente estudiadas en la comunidad educativa. Un elemento a considerar es la dificultad en el manejo de las desigualdades. Otro aspecto más fino radica en la presencia de los cuantificadores universal y existencial; los cuales por su significado y por el orden de aparición, representan un obstáculo de orden lógico en la comprensión de la definición. De igual manera, podemos mencionar problemas de aprendizaje asociados con la elección de los números ε y δ; pues para los estudiantes generalmente no resulta muy clara la relación de dependencia entre ε y δ, ni en el caso en que la función es continua ni en el caso en que no lo es.

Como muchos libros lo hacen, queremos expresar esta definición en términos de vecindades y valorar su aporte en la comprensión del concepto de continuidad. Veamos: la expresión $0 < |x - a| < \delta$ se puede traducir como una vecindad de a y la expresión $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ como una vecindad de $f(a)$. Así podemos decir que una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en a si, dado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta)$ entonces $f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

En otras palabras: dada la vecindad de radio ε alrededor de $f(a)$, podemos encontrar una vecindad básica para a de radio δ tal que, si $x \in V_\delta(a)$ entonces su imagen $f(x) \in V_\varepsilon(f(a))$. Es decir, dada una vecindad de $f(a)$ podemos encontrar una vecindad de a con la propiedad que, la imagen por f de esta última, se encuentra dentro de la de $f(a)$.

En términos formales se expresa como:

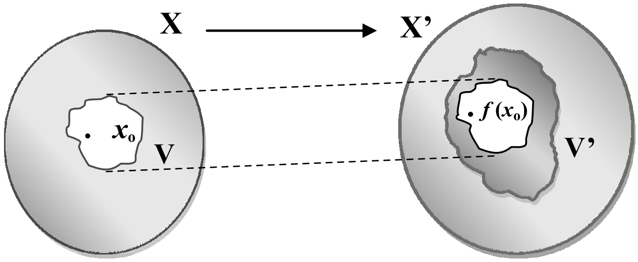
Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *continua* en un punto $x = a$ si y sólo si para toda vecindad V' de $f(a)$, existe una vecindad V de a tal que $f(V) \subseteq V'$.



Informalmente podemos decir que: un pequeño cambio en *a* produce un pequeño cambio en *f*(*a*); lo cual nos recuerda la definición de Cauchy, en tanto expresa de manera más intuitiva las condiciones que se deben cumplir alrededor del punto *a* y de su imagen en las funciones llamadas continuas. Esta definición nos muestra de manera más inmediata la relación entre continuidad y vecindad; y tiene un componente pedagógico importante pues se reivindica el papel de la intuición en la comprensión de un concepto sin atentar contra el rigor del mismo.

Para hablar de continuidad en funciones definidas en conjuntos distintos a ℝ, necesitamos volver a la consideración abstracta de vecindad. La continuidad puntual, en su máxima expresión de abstracción y generalidad, se puede extraer de los *Eléménts de Mathématique* de Bourbaki:

> Se dice que una aplicación *f* de un espacio topológico X en un espacio topológico X' es <u>continua</u> en un punto $x_o \in$ X si, cualquiera que sea la <u>vecindad</u> V' de $f(x_o)$ en X´, existe una <u>vecindad</u> V de x_o en X tal que la relación $x \in$ V implica que $f(x) \in$ V'[21].



Esta definición aparece en el libro III de *Topología General*, en el capítulo 1 dedicado a las Estructuras Topológicas. Aquí hace referencia a una función definida en un espacio topológico cualquiera y a la noción abstracta de vecindad. La definición de funciones numéricas continuas y semi-continuas aparece en el capítulo 4 del mismo libro, una vez se han construido los números reales.

Es importante resaltar aquí que, si bien esta definición se ubica en un alto nivel de abstracción y generalidad, esto no necesariamente implica una mayor dificultad de comprensión. Por el contrario, consideramos que la definición de continuidad tanto para espacios métricos como para espacios topológicos resulta incluso más intuitiva que la expresada en términos de ε y δ. En este sentido compartimos plenamente la posición de Bourbaki, a través de Dieudonné, quien considera que entre más abstracto y general se presente un concepto es más pura la intuición[22] del mismo:

---

21 Bourbaki (1965, p. 23).

22 Para Bourbaki la *intuición* no está referida a lo sensible, está ligada a una profunda relación in-

Los progresos de la *intuición* —contrariamente a lo que se podría creer— van a la par con los progresos de la *abstracción*. Entre más abstractas son las cosas, más se fortalece la intuición. ¿Por qué? Porque la abstracción elimina todo esto que es contingente en una teoría[23].

Dieudonné presenta esta interesante relación entre intuición y abstracción. Entre más abstracto sea el concepto, hay menos factores adicionales que pueden confundir la intuición del mismo. En un nivel más alto de abstracción, la intuición es más apropiada pues existen menos posibilidades de equivocación. Una intuición más pura guía por un camino más seguro la capacidad creadora del individuo. De hecho, con la noción de vecindad, se excluyen factores contingentes, como la operatividad y la relación cuantitativa entre los $\varepsilon - \delta$ y resulta más evidente la relación entre continuidad y vecindad[24].

Vecindad vs. límite de una sucesión

Es importante tener presente que una sucesión de números reales es una función cuyo dominio de definición son los números naturales y que toma sus valores en los números reales. Si consideramos una tal función, digamos $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, es usual escribir $a(n)$ como a_n. Como ejemplos tenemos:

$$a_n = 1/n,\ \ b_n = n,\ \ c_n = 3,\ \ d_n = (-1)^n n \ \text{ y } e_n = (1+1/n)^n.$$

De cierta manera, son sólo listas de números indexados por los naturales, y resulta interesante pensar qué sucede con estas listas cuando avanzamos más y más en la sucesión. Esto no dice mucho, pues las funciones pueden comportarse de múltiples formas; sin embargo, existen algunas cuyos valores se concentran, es decir, sus valores son muy próximos a un punto. Por ejemplo c_n se concentra en 3 trivialmente puesto que es constante.

Intuitivamente podemos pensar que, en el caso de la sucesión a_n**,** a medida que se toman valores muy grandes para n, los valores de la sucesión se

telectual con los objetos matemáticos, los cuales, después de mucho trabajo, se ven tan naturales y corrientes como los seres del mundo sensible. Es decir, la intuición no surge de una relación inmediata con el objeto sino que se construye a partir de un juicioso trabajo intelectual.

23 Esta cita de Dieudonné es extraída del libro *Jean Dieudonné: mathématicien complet* escrito por Pierre Dugac. Ver Dugac (1995, p. 38).

24 Concluimos esta sección con dos ejemplos que muestra la relación Continuidad vs. Vecindad, en una función definida en el espacio métrico $\mathbb{R}$:

i) Sean $d(x, y) = |x - y|$ y $d.(x, y) = \min \{ |x - y|, 1 - |x - y| \}$, distancias definidas en el intervalo X = [0,1). La función $f(x) = x$ definida de $[X, d] \to [X, d]$ es naturalmente continua en x = 0. Sin embargo, la misma función considerada de $[X, d^*] \to [X, d]$ no lo es.

ii) Otro ejemplo es el siguiente: Sea $d_1(x, y) = |x - y|$ si $x - y \in \mathbb{Q}$ y $d_2(x, y) = 1 + |x - y|$ si $x - y \in \mathbb{I}$**.** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como: $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{I}$. Podemos verificar que f <u>no</u> es continua usando d_1 pero f <u>si</u> es continua usando d_2

acercan a cero, lo que abreviamos diciendo que la sucesión se concentra en 0. Estos dos casos particulares dan cuentan de lo que denominamos límite de la sucesión, para ser más precisos el límite de los valores de la sucesión cuando los valores de *n* tienden a infinito.

En otras palabras, estamos interesados en precisar ó formalizar la propiedad que tienen algunas sucesiones: sus imágenes se concentran en un único valor cuando los números naturales en la definición son muy grandes, en tal caso se dice que la sucesión *converge* a dicho punto. En la mayoría de los textos de matemáticas, esto se formaliza diciendo que:

a_n *converge* a L si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ N $\in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$. Esto se simboliza por Lím $a_n = L$.

Una forma más explícita de ver la relación entre límite de una sucesión y la noción de vecindad, es expresando este límite de una sucesión en los siguientes términos: se dice que un número real L es el límite de la sucesión si, cualquiera que sea la vecindad V de L, esta vecindad contiene todos los a_n, salvo por un número finito de valores de *n*. Dicho de otra manera, el conjunto de los *n* para los cuales $a_n \in V$ es una parte del conjunto $\mathbb{N}$ cuyo complemento es finito.

Si recordamos el ejemplo No. 5 de vecindades, no es difícil inferir que lo que dice tal definición es que para toda vecindad V_L de L existe una vecindad de infinito U_N tal que si *n* está en U_N entonces a_n está en V_L. Es decir, cuando nos acercamos a infinito los valores de la función se acercan a L.

Teniendo presente estas relaciones entre continuidad, límite y vecindad, intentaremos identificar el rol de cada una de ellas en los procesos típicos de construcción de los números reales.

La completez de los reales y el rol de la vecindad

La *completez* es la propiedad esencial que poseen los números reales, y es la que realmente diferencia a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$**.** Presentamos a continuación los aspectos fundamentales de las dos maneras típicas de llegar a $\mathbb{R}$, a través de sucesiones de Cauchy de números racionales y a través de cortaduras. Es importante decir que privilegiaremos en esta presentación las ideas de fondo en contraste con los detalles técnicos.

A través de sucesiones de racionales

En este aparte vamos a considerar sucesiones que toman sus valores en el conjunto de los números racionales. Es decir, funciones de la forma $a: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

Las sucesiones que vimos en la sección anterior son también ejemplos de sucesiones de racionales. Pero ahora queremos presentar con detalle la sucesión $e(n) = (1 + 1/n)^n$ pues goza de una propiedad muy singular. Ella no converge en un sentido estricto, pues no existe un número racional en el cual se concentre la sucesión, es decir, su límite no existe en $\mathbb{Q}$. Esta afirmación no es inmediata y su sustentación desborda el objetivo del presente comentario. Sin embargo sus valores se aproximan entre ellos cada vez más en la medida en que n se hace más grande. Con una calculadora es posible comprobar esta afirmación, por lo menos para unos cuantos valores de n. Podemos observar que para valores muy grandes en los números naturales, los valores de las imágenes se acercan entre si. Aunque en este caso no esté el punto límite, como sucede con las sucesiones convergentes.

Este tipo de comportamiento nos resulta extremadamente curioso, pues en últimas se comportan como las convergentes aunque no lo sean. Aunque históricamente se denominan sucesiones regulares o fundamentales, modernamente se conocen como sucesiones de Cauchy.

Una sucesión $a(n)$ se dice de *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que si n y m son mayores que N entonces $|a(n) - a(m)| < \varepsilon$.

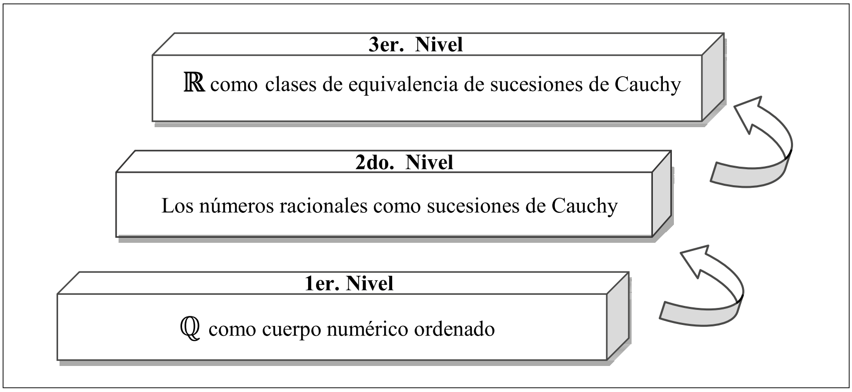
Veamos que las sucesiones convergentes son sucesiones de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, si consideramos $\{a_n\}$ como una sucesión convergente, digamos que converge al número L, entonces para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists\ \mathbb{N}\ \mathbb{N}$, tal que si $n > N$ se cumple que $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, para todos $n, m > N$ se cumple que $|a_n - a_m| = |a_n - L - (a_m - L)|\ \ |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Es decir, la sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy.

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Es decir, existen sucesiones de Cauchy que no convergen. Un ejemplo típico es de la sucesión $e(n)$ la cual es de Cauchy pero no converge en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, en cualquier sucesión de Cauchy, a partir de números naturales muy grandes, los términos de la sucesión están arbitrariamente cercanos y la intuición sugiere que dicha sucesión converge. Pero no sabemos a qué, no tenemos el número al cual converge. Esto indica que los números racionales no son suficientes para contener la acción del límite, falta algo más.

Por lo tanto, es casi natural que nos surja la idea de representar tales límites inexistentes en $\mathbb{Q}$ por otro tipo de nuevos números, si se quiere extender a $\mathbb{Q}$ de tal forma que dichos límites tengan cabida. La idea básica es *completar* a $\mathbb{Q}$ con esos nuevos números, sin perder la estructura algebraica ordenada que teníamos.

$\mathbb{R}$ como límite de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$

Es importante tener presente el camino lógico que seguiremos en esta presentación: vamos a partir de los números racionales con su estructura de cuerpo numérico ordenado, luego consideramos a los números racionales como sucesiones racionales de Cauchy, para luego pensar en los números reales como “límites” de sucesiones de Cauchy[25].



Esto significa que en un primer nivel ubicamos al conjunto de los números racionales con su estructura de cuerpo numérico ordenado. Luego, damos un “salto” epistemológico que nos ubica en un nivel más alto de abstracción y pensamos en cada racional no como un número sino como una sucesión de Cauchy. Es decir, representamos los números racionales por sucesiones de Cauchy. Para tal efecto, debemos reconocer, en primera instancia, que unas buenas candidatas son las sucesiones constantes. Es decir, si r es un racional, la sucesión que mejor podría representarlo es justamente la sucesión constante $\underline{r}$ y de valor r. Pensemos en el caso particular del número cero y miremos nuestros ejemplos, de inmediato nos percatamos que además de la sucesión constante $\underline{0}$ y de valor cero, la sucesión $1/n$ también tiene límite cero, pero además $1/n^2$ también lo tiene y con esta observación no es difícil convencernos que existen infinitas sucesiones con la característica de tener límite cero. No es difícil creer que lo mismo puede suceder para todos los racionales.

Posteriormente, se trata de hacer “paquetes” o colecciones de sucesiones que tengan el mismo límite. En matemáticas se usa la palabra *clase* en lugar de paquetes o colecciones, y estas clases han de desempeñar el papel de los nuevos números, obviamente para poder hablar de ellas necesitaremos de un representante. Realmente para hacer esto formalmente hay que mostrar que la relación “tener el mismo límite” es una relación de equivalencia. Una vez tenemos las clases de equivalencia y sus representantes, hemos subido un piso más. Podríamos pensar en un tercer nivel. Es decir, cuando aquí

25 Georg Cantor fue el primero en publicar una construcción de los reales por sucesiones fundamentales de números racionales (sucesiones de Cauchy). En 1872, en su artículo *Sobre la extensión de un teorema de la teoría de series trigonométricas*, y en 1883, en el artículo *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*.

hablamos del número 0, estamos pensando en la clase formada por todas las sucesiones que convergen a 0. Por lo tanto, ubicados en este nivel, las sucesiones $1/n$, $1/n^2$, $3/n^4-2$ y la sucesión constante 0 representan lo mismo, a saber el número 0, pues todas ellas están en el mismo paquete o clase de equivalencia.

Una vez formadas estas clases definimos la estructura básica, digamos la suma, el producto y el orden. Para sumar dos clases, se escogen dos representantes uno de cada clase, que son sucesiones y se suman término a término, y a esta nueva sucesión se le calcula su clase, y esta nueva clase la denominamos la suma de las dos clases dadas. Esto es bastante razonable, pero el asunto es que debemos verificar que si repetimos el proceso con otros dos representantes obtenemos la misma suma.

En forma similar se puede establecer el producto y el orden entre estas clases, y mostrar que obtenemos una estructura algebraica del mismo tipo que los racionales con la suma, la multiplicación y el orden. Este hecho lo abreviamos diciendo que las clases de sucesiones de Cauchy antes mencionadas forman un cuerpo numérico ordenado. Este nuevo cuerpo numérico ordenado goza además de la característica de contener una copia exacta de $\mathbb{Q}$, pues cada número racional r está representado por la clase de sucesión constante $\underline{\boldsymbol{r}}$ y de valor $\boldsymbol{r}$, y por la construcción de las operaciones y el orden en el nuevo cuerpo, resulta obvio que para las representaciones de todos los racionales (vistos ahora como clases de sucesiones) las operaciones y el orden constituyen una fiel copia de las que se tenían en $\mathbb{Q}$. Este hecho es habitualmente referido diciendo que se tiene una Inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Lo más importante en este momento es que si tomamos $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, entonces por la inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, tenemos $\{[\underline{\boldsymbol{a}_n}]\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, donde $\underline{\boldsymbol{a}_n}$ denota la sucesión constante de valor a_n, y $[\underline{\boldsymbol{a}_n}]$ la clase de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que tienen límite a_n. La sucesión $\{[\underline{\boldsymbol{a}_n}]\}$ converge a $[\{\boldsymbol{a}_n\}]$, donde $[\{\boldsymbol{a}_n\}]$ es la clase de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que tienen el mismo límite que $\{\boldsymbol{a}_n\}$.

En resumen, hemos formado un nuevo cuerpo numérico ordenado a través de las clases de sucesiones de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$, que tiene inmerso a $\mathbb{Q}$, y tiene exactamente las mismas propiedades algebraicas y de orden que $\mathbb{Q}$, pero el cual goza de una característica magnífica: en él, las sucesiones de Cauchy coinciden con las convergentes; es decir, hemos obtenido un nuevo cuerpo numérico ordenado donde están los límites que le faltaban a las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Este cuerpo numérico ordenado se dice completo y por supuesto no es otro que los números reales[26].

26 En Dixmier (1967) se encuentra una forma típica de construir los reales por sucesiones de Cauchy. Fue uno de los libros más empleados en la enseñanza del análisis en Francia en la segunda mitad del siglo XX.

Completez por sucesiones vs. vecindad

En este aparte nos interesa resaltar la relación que existe entre la convergencia de las sucesiones de Cauchy y la noción de *vecindad*, pues la consideramos fundamental para nuestro propósito educativo.

Sabemos que al considerar en $\mathbb{Q}$ una sucesión de Cauchy $\{a_n\}$, podemos decir que, cuando n se acerca a infinito, los valores a_n se acercan entre ellos. Sin embargo, existen dificultades para expresar esta condición usando vecindades, pues aunque es posible visualizar los valores n en una vecindad de infinito (ejemplo No. 5 de vecindades), no podemos hacer lo mismo en relación con las imágenes a_n. Estas imágenes se acercan entre ellas y convergen hacia una "cantidad" que no existe en $\mathbb{Q}$ y por lo tanto no tenemos un valor alrededor del cual podamos ubicar dicha vecindad. Es decir, la sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ no tiene a "quien" acercarse. En otras palabras, en $\mathbb{Q}$ no se puede hablar de la continuidad de la sucesión $\{a_n\}$ en infinito.

Sin embargo, en el nuevo cuerpo $\mathbb{R}$ este problema no se presenta. Al considerar en éste una sucesión de Cauchy tenemos que, en la medida que n se acerca a infinito, los valores se acercan al valor $[\{a_n\}]$. En términos de vecindades, decimos que si los valores de n pertenecen a una vecindad de infinito entonces los valores $[\underline{a}_n]$ están en una vecindad de $[\{a_n\}]$. Es decir, la sucesión de Cauchy en este nuevo cuerpo numérico sí tiene a "quien" acercarse. Esto significa que en $\mathbb{R}$ no sólo es posible hablar de continuidad de la sucesión $\{[\underline{a}_n]\}$ en infinito sino que podemos afirmar que es continua en infinito.

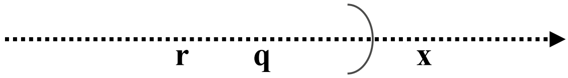
Esta diferencia relacionada con la convergencia de las sucesiones en ambos cuerpos numéricos, nos permite concluir algo fundamental para nuestro interés: el paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ posibilita la continuidad en el infinito de las funciones racionales de Cauchy. Esta forma de relacionar la noción de completez con continuidad en infinito, ocupa un lugar importante en la historia de la topología. De hecho, en 1900 Hilbert presenta su axiomática de los números reales agregando a los axiomas de cuerpo numérico el axioma de continuidad que recoge la propiedad arquimediana y su forma particular de completez. En 1901 Holder hace una caracterización similar, salvo que la completez aparece en términos cortaduras. En 1902 algunos matemáticos americanos, más específicamente Huntington presenta los números reales de igual forma, pero tomando la completez al estilo Weierstrass.

A través de cortaduras

En esta parte, haremos uso del lenguaje conjuntista, junto con algunas propiedades básicas de la teoría de conjuntos. Recordemos en primer lugar el concepto de cortadura: Un subconjunto $\mathbf{x}$ de $\mathbb{Q}$ se llama una "cortadura" de Dedekind si satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{x}$ es distinto de vacío y de $\mathbb{Q}$.

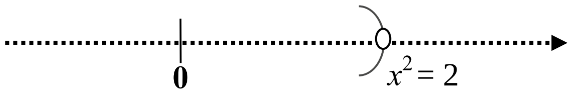
2. Si para todo elemento **q** en **x** y para todo **r** < **q** entonces **r** también es un elemento de **x**. Abreviadamente diremos que **x** es cerrado hacia abajo.
3. El máximo de **x** no existe.



4. Las cortaduras se pueden clasificar en dos tipos: las de tipo I, aquellas que se generan por un número racional **r** dado, es decir, el conjunto formado por todos los números racionales estrictamente menores que **r.** Las de tipo II son aquellas que no son de tipo I, es decir, que no se obtienen por un número racional[27].

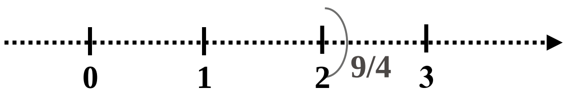
Citemos varios ejemplos:

(1) El conjunto formado por todos los racionales menores o iguales que cero unido con el conjunto de los racionales cuyo cuadrado es estrictamente menor que 2 es una cortadura de tipo II. Es decir, el conjunto $\{x \in \mathbb{Q}: x \leq 0 \text{ o } x^2 < 2\}$ es una cortadura de tipo II.



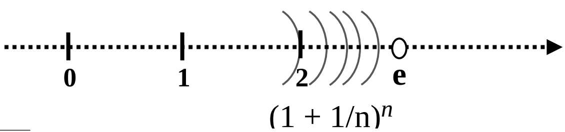
(2) En términos más generales, sean $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\sqrt[n]{\boldsymbol{r}}$ no es un número racional. El conjunto $\{x \in \mathbb{Q}$: x 0 o $x^n < \boldsymbol{r}\}$ es una cortadura de tipo II.

(3) Dado n un número natural, el conjunto de los números racionales menores estrictamente que $(1+1/n)^n$ es una cortadura de tipo I. Es decir, el conjunto $\{x \in \mathbb{Q}: x < (1+ 1/n)^n\}$ es una cortadura de tipo I.



Para $n = 2$ se tiene la cortadura formada por todos los números racionales menores a 9/4.

(4) El conjunto formado por la unión de todos los conjuntos del ítem (3) es una cortadura de tipo II. Se conoce como el número de Euler y se representa por la letra **e**:

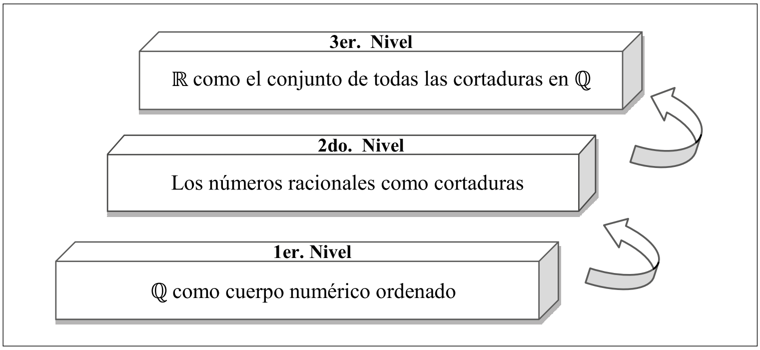


[27] Tema ampliamente desarrollado en Hrbacek, K., and Jech, T. (1999).

Las cortaduras del tipo I son fáciles de intuir, y podemos identificar cada número racional con la cortadura que él genera, de hecho hasta aquí no hemos logrado nada nuevo. En contraste, las del tipo II son más difíciles de intuir, y de hecho en la construcción de los números reales son las más importantes, pues como ellas no se pueden determinar por un número racional dan origen a unos nuevos números reales no racionales, que usualmente llamamos números irracionales.

Los números reales como cortaduras sobre $\mathbb{Q}$

Al igual que en la construcción por sucesiones, partimos del conjunto de los números racionales con sus propiedades estándar de cuerpo numérico ordenado. En un segundo momento consideramos los números racionales como cortaduras para ver finalmente los números reales como el conjunto de todas las cortaduras sobre $\mathbb{Q}$[28].



En este último conjunto se pueden definir las operaciones básicas de suma y multiplicación y mostrar que los números reales al igual que los racionales gozan de una estructura de cuerpo numérico. Sin embargo, ahora estamos interesados en describir la diferencia fundamental entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, usando la presentación de las cortaduras. Recordemos que dicha diferencia radica en la completez de los reales. La completez de $\mathbb{R}$ en esta presentación se caracteriza por la propiedad del supremo[29], es decir, si A es un subconjunto no vacío de números reales que es acotado superiormente entonces el supremo de A existe y es un elemento que está en $\mathbb{R}$[30].

28 En 1872 Richard Dedekind publica por primera vez una construcción de los números reales a través de cortaduras en $\mathbb{Q}$. Los detalles de esta construcción se pueden consultar en Dedekind (1998). De igual manera, recomendamos la lectura del capítulo "Los números reales como objeto matemático" de este mismo libro, en el que se analiza la construcción original de Dedekind.

29 El supremo generaliza el concepto de máximo, de esta forma corresponde a la menor de las cotas superiores.

30 Es usual encontrar en las presentaciones axiomáticas de los números reales las propiedades que definen la estructura de cuerpo numérico ordenado, agregando el denominado axioma del supremo. Ver, por ejemplo, Apostol (1960).

Si tenemos una sucesión no vacía de conjuntos A, en nuestro caso subconjuntos acotados de $\mathbb{Q}$, como estamos considerando el orden dado por la inclusión de conjuntos, podemos intuir que de todos los conjuntos más grandes (que contienen a todos los conjuntos en A), el más pequeño es la unión de todos los elementos de A. En otras palabras, el supremo de A está dado por la unión de todos los elementos de A, que representaremos por $\cup$A. Veamos que nuestra intuición es correcta, Es decir, que efectivamente el supremo de A es $\cup$A.

Veamos un esbozo de la prueba. Lo primero que debemos constatar es que todos los elementos de A son menores o iguales que $\cup$A. Por la definición de $\cup$A todos los elementos de A son subconjuntos de $\cup$A, así por la definición del orden obtenemos que todos los elementos de A son menores o iguales que $\cup$A. Lo segundo por constatar es que si tenemos otra cota superior para A, digamos **z**, entonces $\cup$A es menor o igual a **z**. Como **z** es una cota superior para A entonces todos los elementos de A son menores o iguales que **z**, es decir, todos los elementos de A son subconjuntos de **z**, y por lo tanto la unión de todos ellos es también un subconjunto de **z**. Pero la unión de todos ellos es justamente $\cup$A, con lo cual hemos constatado que $\cup$A es menor o igual que **z**.

Lo tercero por constatar es que $\cup$A es un elemento de $\mathbb{R}$**.** Como A es no vacío entonces $\cup$A también es no vacío**,** puesto que los elementos de A son cortaduras, que por definición son conjuntos no vacíos. Además como A es acotado entonces $\cup$A también lo es, y por lo tanto $\cup$A es diferente de $\mathbb{Q}$. Además $\cup$A es cerrado hacia abajo: si tomamos **r** un elemento de $\cup$A, entonces por la definición de $\cup$A tenemos que existe un elemento ***y*** de A tal que **r** es un elemento de ***y*.** Como ***y*** es una cortadura se tiene que los racionales menores que **r** están en ***y*,** y por lo tanto están en $\cup$A, es decir, $\cup$A es cerrado hacia abajo. Por último, el máximo de $\cup$A no puede existir, pues en tal caso estaría en algún elemento de A siendo igualmente el máximo de dicho elemento, lo que no puede ser pues este elemento es una cortadura.

En estos términos, nos preguntamos entonces ¿cuál es la diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$? Supongamos que A es el conjunto de números reales formado por todas las cortaduras generadas por los racionales menores que 3, entonces es fácil intuir que $\cup$A es igual a la cortadura generada por 3. Es decir, el supremo de todos los números reales generados por racionales menores que 3 es igual a la cortadura generada por 3, y es de nuevo una cortadura generada por un racional. En términos más generales, si A es un conjunto formado por todas las cortaduras generadas por los racionales menores que un número racional dado **r,** el supremo de A es igual a la cortadura generada por **r**. Es decir, en este caso no hemos ganado nada nuevo, pues si vemos estos mismos ejemplos dentro de los racionales, tomando en lugar de las cortaduras generadas por los racionales los respectivos números racionales, las cosas funcionan igual.

Ahora pensemos que el conjunto A está formado por todas las cortaduras de tipo I, dadas por todos los números racionales cuyo cuadrado es estrictamente menor que 2. Entonces el supremo de A es una cortadura de tipo II, lo cual se desprende del primero de los ejemplos anteriores. Aquí si hemos ganado algo nuevo, pues vistos estos mismos elementos del conjunto A dentro de los racionales, es decir tomando en lugar de las cortaduras generadas por los racionales los respectivos números racionales, las cosas ya no funcionan igual. En los números racionales, si A es el conjunto formado por los racionales cuyo cuadrado es menor que 2, el supremo de A no existe en $\mathbb{Q}$.

Consideremos ahora al conjunto A formado por todos los números reales (cortaduras) generados por los números racionales de la forma $(1 + 1/n)^n$ con $n \in \mathbb{N}$[31]. Es un problema complejo para esta breve presentación demostrar que $\cup$A no está dada por un número racional, pero como ya lo mencionamos en el ejemplo No. 4 de cortaduras, en este caso y a diferencia del caso anterior, el supremo de A es una cortadura de tipo II. Nuevamente hemos ganado algo, pues vistos estos mismos elementos del conjunto A en los racionales, es decir tomando en lugar de las cortaduras generadas por los racionales los respectivos números racionales, las cosas ya no funcionan igual al primer caso. Es decir, si A = $\{x \in \mathbb{Q}: x < (1+ 1/n)^n, n \in \mathbb{N}\}$, el supremo de A no existe en $\mathbb{Q}$.

Hemos visto que la propiedad de *completez* no se verifica en el conjunto de los números racionales. Es decir que, es posible encontrar un subconjunto A no vacío de números racionales acotado superiormente para el cual el supremo de A no existe en $\mathbb{Q}$. Esto responde nuestro interrogante acerca de la diferencia fundamental entre los números racionales y los reales: los números racionales no constituyen un cuerpo numérico completo mientras que los números reales sí.

Completez por cortaduras vs. vecindad

La relación entre la completez y la vecindad en términos de cortaduras se establece a través del concepto de límite de una sucesión de conjuntos.

Ya mostramos que $\cup$A representa el supremo de A, es decir, es el menor elemento que está justo después de todos los elementos de A. Tomemos por ejemplo A como el conjunto de todas las cortaduras menores que 3 entonces obtenemos que $\cup$A es la cortadura 3. Podemos imaginar rápidamente que las cortaduras se aproximan cada vez más a la cortadura 3, aunque éste no esté en el conjunto. Si seguimos viendo los elementos del conjunto A como encajados cada uno dentro del otro, lo que encontramos en $\cup$A es justo el más grande ellos, que está más próximo a todos ellos. En últimas, $\cup$A es un límite; un límite de una sucesión de conjuntos mas no de puntos.

---

31 Esta sucesión fue estudiada en el apartado *A través de sucesiones de racionales*. Consideramos importante establecer permanentemente comparaciones con la reflexión que se plantea en este apartado para identificar las analogías.

En este sentido, el sup A se puede expresar en términos de vecindades: consideremos la función f: $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(r) = (-\infty, r) \cap \mathbb{Q}$. Tenemos que "cuando r se acerca por la izquierda a 3", "las imágenes de f se acercan a $f(3)$ por la izquierda". Dicho de otra manera, si las imágenes de f están en una vecindad V por la izquierda de 3 en $\mathbb{R}$, siempre existe una vecindad U por la izquierda de 3 en $\mathbb{Q}$, tal que si $r \in U$ entonces $f(r) \in V$.

Volvamos al ejemplo en que A está formado por todas las cortaduras generadas por los números racionales de la forma $(1+ 1/n)^n$ con $n \in \mathbb{N}$. De nuevo, al considerar los elementos del conjunto A como encajados cada uno dentro del otro, lo que encontramos en ∪A, es justo el más grande ellos, el que está más próximo a todos ellos. Nuevamente, ∪A es un límite; un límite de una sucesión de conjuntos que converge al número real (la cortadura) ***e*** que no está dada por un racional.

Consideremos entonces la función f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = Cn$, donde Cn es el conjunto definido por $(-\infty, (1+ 1/n)^n) \cap \mathbb{Q}$. Tenemos que "cuando n se acerca a ∞", "$f(n)$ se acerca a ***e***". Es decir, dada una vecindad V de ***e*** en $\mathbb{R}$, existe una vecindad U de ∞ en $\mathbb{N}$, tal que si $n \in$ U entonces $f(n) \in$ V.

Es importante tener presente que podemos ubicar vecindades alrededor de ***e*** porque las imágenes de f están en el conjunto $\mathbb{R}$**.** Si nos restringiéramos al conjunto de los números racionales "$f(n)$ no tendría un valor a cual acercarse" a medida que "n se acerca a ∞", pues como sabemos el supremo del conjunto $\{x \in \mathbb{Q}: x < (1+ 1/n)^n, n \in \mathbb{N}\}$ no existe en $\mathbb{Q}$.

En esta tercera parte del capítulo hemos asistido a las dos formas clásicas de construcción de los reales; y no podemos concluirlo sin intentar mostrar que la construcción por cortaduras de Dedekind atrapa plenamente la completez que obtuvimos por sucesiones de Cauchy y viceversa.

Equivalencia entre la construcción de $\mathbb{R}$ por cortaduras y por Sucesiones de Cauchy

Primero mostraremos que a partir de los números reales definidos por cortaduras de Dedekind se obtiene que las sucesiones de Cauchy, en estos números reales, coinciden con las sucesiones convergentes. Al final volveremos con el proceso recíproco. Insistimos en que, en nuestro esfuerzo de explicación, prevalecen las ideas centrales en contraste con los detalles técnicos.

Como en nuestra construcción de los números reales por cortaduras de Dedekind hemos privilegiado el orden ascendente en la inclusión de los conjuntos, veamos que esto se traduce en una forma muy particular de mirar la completez por sucesiones. Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ *es creciente* si para todos $n < m$ implica que $a_n \leq a_m$ y que es decreciente si para todos $n < m$ implica que $a_m \leq a_n$.

En estos términos, la completez de los números reales nos permite concluir el siguiente resultado:

"En los números reales toda sucesión creciente acotada superiormente tiene límite; es decir, es convergente".

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales creciente y acotada superiormente, como ya sabíamos de nuestras discusiones anteriores, tiene límite y no es otro que el supremo, visto como cortaduras corresponde a la unión de todas las a_n. Es un ejercicio bastante simple mostrar que, si toda sucesión creciente acotada superiormente tiene límite, toda sucesión decreciente acotada inferiormente tiene límite[32].

De otro lado, dada una sucesión, recordemos que una subsucesión es cualquier sucesión obtenida de un subconjunto de números de la sucesión original. Invitamos a nuestros lectores a confirmar la afirmación siguiente sin tomar el caso trivial de las subsucesiones constantes.

"Toda sucesión contiene una subsucesión que es creciente o decreciente".

Esta afirmación, junto con el resultado antes establecido, nos permite recibir como una conclusión inmediata uno de los resultados más importantes en el estudio de límites y convergencias sobre los números reales, se trata del teorema de Bolzano-Weierstrass que enunciamos a continuación.

"Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente".

Este resultado nos permitirá concluir que toda sucesión de Cauchy en los números reales es convergente, pero antes precisamos de una última observación: toda sucesión de Cauchy es acotada. Si $\{a_n\}$ es de Cauchy entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que si n y m son mayores que N se tiene que $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 1$ tenemos que, existe un número natural M, tal que si n y m son mayores que M entonces $|a_n - a_m| < 1$. Con lo cual tenemos que $|a_n - a_{M+1}| < 1$ para todo n mayor que M. Por lo tanto, para todo n mayor que M los valores de la sucesión cumplen que $|a_n| = |a_n - a_{M+1} + a_{M+1}| \leq |a_n - a_{M+1}| + |a_{M+1}| < 1 + |a_{M+1}|$. De donde se obtiene que para todo n se cumple que $|a_n|$ es menor que el máximo entre $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_M|$ y $1 + |a_{M+1}|$, y así $\{a_n\}$ es acotada.

Dada una sucesión de Cauchy tenemos que es acotada por la observación anterior, y por el teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que ella tiene una subsucesión convergente. Como las sucesiones de Cauchy gozan de la propiedad de que sus puntos en el infinito se están acercando entonces no queda otra opción sino que la sucesión converja al mismo límite de la subsucesión en mención.

[32] Dada una sucesión decreciente acotada inferiormente, tomando la sucesión de los opuestos se obtiene una sucesión creciente acotada superiormente, la cual tiene límite por la hipótesis, y se concluye que el límite de la decreciente resulta ser el opuesto al límite de la creciente.

Formalicemos un poco este comentario, sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy y sea $\{a_{ni}\}$ una subsucesión convergente de $\{a_n\}$, la cual existe por teorema de Bolzano-Weierstrass, digamos que $\{a_{ni}\}$ converge a L. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, entonces existe N_1 tal que para $n, m > N_1$ se tiene que $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ y existe N_2 tal que para $n_i > N_2$ se tiene que $|a_{ni} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si tomamos N como el máximo entre N_1 y N_2, tenemos que para n y n_i mayores que N se tiene que $|a_n - L| = |a_n - a_{ni} + a_{ni} - L| \leq |a_n - a_{ni}| + |a_{ni} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Con esto concluimos que: toda sucesión de Cauchy es convergente. Por lo tanto, tenemos en la construcción por cortaduras que las sucesiones convergentes coinciden con las sucesiones de Cauchy.

Ahora veamos la argumentación recíproca: si tenemos la completez por sucesiones de Cauchy entonces se cumple el axioma del supremo. En este camino tendremos por hipótesis que toda sucesión de Cauchy es convergente. Sea A un subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente. Si tomamos a C como el conjunto de las cotas superiores para A tenemos que C es no es vacío y debemos argumentar que el mínimo de C existe.

Nuestro argumento será por contradicción. Es decir, vamos a suponer que tal mínimo no existe y llegaremos a una contradicción. Tomemos c un elemento de C, lo cual es posible pues es diferente de vacío, y hagamos $c_o = c$. Del supuesto que el mínimo de C no existe podemos inferir que existe una sucesión estrictamente decreciente $\{c_n\}$ de cotas superiores para A. Es decir, si a es un elemento de A tenemos que $\ldots c_n > c_{n+1} > \ldots > a$. Veamos que la sucesión $\{c_n\}$ es de Cauchy. Si suponemos que no lo es, entonces no se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que si n y m son mayores que N se tiene que $|c_n - c_m| < \varepsilon$. Por lo tanto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo N, n, m mayores que N y además $|c_n - c_m| \geq \varepsilon$. Luego tomando $N = 1$ y $m = n+1$ se tiene que $|c_n - c_{n+1}| \geq \varepsilon$ para todo n. Como la sucesión es decreciente, $c_0 - c_1 \geq \varepsilon$, $c_1 - c_2 \geq \varepsilon, \ldots,$ y $c_{m-1} - c_m \geq \varepsilon$. Sumando estos m términos tenemos que $c_0 - c_m \geq m\varepsilon$, para todo m.

De otro lado podemos suponer que $0 < \varepsilon < c_0 - a$, y por la propiedad arquimediana[33] existe un natural M tal que $M\varepsilon > c_0 - a$. Con lo cual podemos concluir que $c_0 - c_M \geq M\varepsilon > c_0 - a$. Lo que nos conduce a la contradicción $c_M < a$, pues c_M es una cota superior para A. Por lo tanto la sucesión $\{c_n\}$ es de Cauchy y por la hipótesis es convergente. Por la definición de la sucesión tenemos que el límite no es otro que el supremo de A, lo cual contradice nuestro supuesto original.

A pesar que hemos evitado cantidades de detalles técnicos, y de seguro hemos dejado por fuera un sinnúmero de observaciones importantes, consi-

[33] Si $0 < e < b$ entonces existe un natural N tal que $Ne > b$. Si no existiera tal N tendríamos que para todo natural N se cumpliría $N \geq b/e$, y así los naturales serían acotados, lo cual es contradictorio.

deramos que hemos sentado una panorámica general que nos permite concluir la certeza de la equivalencia entre las dos definiciones de los números reales presentadas. De igual manera, esperamos que la presentación de estos esquemas en la formulación de los números reales, se constituya en una invitación para estudiar, comprender y apropiarse de ℝ como un cuerpo numérico ordenado arquimediano completo.

Conclusiones

En primer lugar, queremos insistir en la importancia de reconocer que las nociones involucradas en la completez de ℝ, tales como continuidad, límite y convergencia no son de naturaleza algebraica sino topológica. Es decir, sin una definición de proximidad o de vecindad en un conjunto dado, que permita establecer cómo se "comportan" los puntos alrededor de un punto dado, es imposible hablar de la continuidad de una función o calcular el límite de una sucesión; y por lo tanto, resulta imposible pensar si dicho conjunto es continuo o no. Esto significa que la completez requiere ontológicamente de la noción de vecindad.

Esta relación de dependencia se observa claramente en las construcciones típicas de los números reales. A partir de un estudio analítico de lo que sucede en puntos arbitrariamente cercanos del conjunto ℚ, se identifica la existencia cortaduras en los racionales que no son producidas por números racionales o la existencia sucesiones de Cauchy de números racionales que no convergen en ℚ. Es decir, se evidencian "huecos" en los racionales, lo que constituye el punto de partida para construir analíticamente un cuerpo numérico "completo" como ℝ.

En segundo lugar, queremos resaltar algunas ventajas de orden didáctico que ofrecen las definiciones de límite de una sucesión y continuidad de una función, en términos de vecindades. Con ellas no sólo se evita el uso de cuantificadores, el manejo de desigualdades y la escogencia del ε y el δ (que con frecuencia se constituyen en obstáculos para la comprensión de estos conceptos), sino que se aprovecha la intuición que conlleva la noción de vecindad, sin atentar contra el formalismo y el rigor. Esto hace más evidente la relación de la continuidad y el límite con la noción topológica de proximidad.

Finalmente estamos interesados en destacar unos aspectos de orden lógico y epistemológico en las construcciones de los reales. En ambas se identifican tres niveles que son de suma importancia reconocer. No vamos a enunciarlos nuevamente pero si consideramos importante tener plena conciencia del paso por cada nivel y el grado de exigencia en términos de abstracción y generalidad. El salto epistemológico más relevante se da en el paso del segundo al tercer nivel: momento en el que se "crean" teóricamente los números reales. En el primer caso, como el conjunto formado por los "límites" o las clases de sucesiones de Cauchy de números racionales, y en el segundo, como el conjunto de todas las cortaduras sobre $\mathbb{Q}$[34].

La noción de vecindad juega un rol fundamental en estos procesos de construcción; sin embargo, no es tan evidente como en las definiciones de continuidad y límite. En ambos casos, la noción de vecindad está relacionada con el límite de sucesiones. Se trata de sucesiones de “paquetes” o clases en el primer caso; mientras que en el segundo, se trata de sucesiones de conjuntos.

Específicamente, al final de la primera construcción, se tiene que el límite de la sucesión $\{[\underline{\boldsymbol{a}_n}]\}$ es $[\{\boldsymbol{a}_n\}]$, donde $[\{\boldsymbol{a}_n\}]$ es la clase de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que tienen el mismo límite que $\{\boldsymbol{a}_n\}$. En la segunda construcción, dada una sucesión no vacía de conjuntos A (subconjuntos acotados de $\mathbb{Q}$ ordenados por la inclusión), se tiene que el límite corresponde a $\cup$A, que a su vez corresponde al más pequeño conjunto que es más grande que todos; es decir al supremo de A. De esta forma, se obtiene en el primer caso un conjunto de clases en el que toda sucesión de Cauchy converge, y para el segundo caso, un conjunto de conjuntos (cortaduras) el que todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.

Bibliografía

Apostol, T. (1960). *Análisis matemático. Introducción moderna al cálculo superior.* Barcelona: Editorial Reverté.

Arboleda, L. (1980). *Las primeras investigaciones sobre los espacios topológicos.* X Coloquio Colombiano de Matemáticas. Sociedad Colombiana de Matemáticas. Paipa.

Arboleda, L., y Recalde, L. (1999). *Matemática y experiencia: La generalización de la noción de espacio abstracto en Maurice Fréchet.* Informe final proyecto de investigación. Universidad del Valle, Cali.

Bergé, A. (2008). *The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis.* Educational Studies in Mathematics. Vol. 67, No. 3. pp. 217-235.

Bourbaki, N. (1965). *Topologie générale. Éléments de Mathématique.* Livre III. Hermann. Paris.

Cantor, G. (1872). *Extension d’un théorème de la théorie des series trigonomé-*

[34] En Casper (1974) se hace una interesante comparación entre la completez en el sentido de Dedekind, de Cantor y de Arquímedes (completez usada por Hilbert en su trabajo sobre fundamentación de la Geometría).

triques. Traduction d'un mém. Publ. de. l. annales math. De Leipsic t. V. p. 123. Acta mathematica 2, 1883, pp. 336-348.

Cantor, G. (1883). *Fondements d'une théorie générale des ensembles.* Extrait d'un article des annales mathématiques de Leipsic, t. XXI, p. 545.

Casper, G. (1974). *Completeness of the Real Numbers.* Mathematics Magazine, Vol. 47, No. 1, pp. 1-8.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis.* Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, D.F. (Selección, traducción directa del francés y notas de Carlos Álvarez Jiménez, introducción de Jean Dhombres).

Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza Editorial (Traducción e introducción de José Ferreirós).

Dixmier, J. (1967). *Cours de mathématiques du premier cycle.* París: Gauthier-Villars.

Dugac, P. (1996). *Jean Dieudonné: Mathématicien Complet.* París: Editions Jacques Gabay.

Hrbacek, K. and Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory***.** Third Edition, revised and expanded. New York: Marcel Dekker, Inc.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días, III*. Madrid: Alianza editorial.

Nadler, S. (2002). *La definición de una topología.* Ciudad de México: Publicaciones del Departamento de Matemáticas de la UNAM. Serie Vínculos Matemáticos No. 14.

Rubiano, G. (2002). *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia. 2ª edición. Bogotá: Panamericana S. A.

Spivak, M. (1970). *Cálculo infinitesimal.* Barcelona: Editorial Reverté.

Capítulo 7

LA CARACTERIZACIÓN CONJUNTISTA DE LOS NÚMEROS REALES: DEL DOMINIO DE LAS MAGNITUDES AL DOMINIO DE LOS CONJUNTOS

Luis Cornelio Recalde[1]

Introducción

Actualmente nosotros usamos, sin que parezca extraño, una misma escala numérica para la representación de longitudes, áreas o volúmenes. Hablando en términos poco rigurosos, decimos que a cada longitud, área, volumen o ángulo, le corresponde un número real positivo que es su medida. Esta forma de medir, que se nos antoja simple para nosotros, se dio en un proceso largo y arduo que justamente adquiere una primera dimensión conceptual en la antigüedad griega, sufre algunos cambios en el Renacimiento, especialmente con Descartes, y llega a su punto culminante con los trabajos de Cantor y Dedekind, en el siglo XIX.

En el primer capítulo vimos que Euclides no posee un sistema numérico referencial ni una teoría de ecuaciones que le permita despejar y calcular el lado del cuadrado de una manera algorítmica. Por ejemplo, si queremos encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo que tiene de base 4 y de altura 5, primero calculamos el área del rectángulo, que es *base* x *altura*: $5 \times 4 = 20$ y luego resolvemos la ecuación: $x^2 = 4. 5$, que nos lleva a la solución $x=\sqrt{20}$, donde la operación raíz cuadrada está definida. Obsérvese que calcular el área ha consistido en asignarle un número a la porción de superficie

[1] Profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle. Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle.

rectangular dada. El número 20, correspondiente al área pedida, representa la medida de la región rectilínea; decimos que hemos efectuado una operación en la cual la magnitud "área" se identifica con un número. Proceso que es lícito realizar en la actualidad, dado que a través de más de veinte siglos hemos construido *una teoría abstracta de la medida*, la cual reposa en el hecho de poder identificar magnitudes con números.

En términos técnicos, hemos establecido que la medida de áreas (o de volúmenes) se define a través de una función, la cual le asigna a cada región plana un número real que corresponde a su medida:

$$f: \{\text{regiones planas acotadas}\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

En los casos de algunas regiones, el cálculo de áreas pasa por el conocimiento de los algoritmos correspondientes. Por ejemplo, decimos que el área de un cuadrado es *lado* x *lado*; el área de un rectángulo *base* x *altura*, etc., para las regiones no rectilíneas se emplea la integral.

Todo esto tiene sentido si se tiene una caracterización completa de $\mathbb{R}$. Es necesario no dejar pasar por alto algunos aspectos de suma importancia para nuestro análisis. En primer lugar debemos tener en cuenta que hemos utilizado el hecho de identificar longitudes con números o, dicho en otros términos, identificar magnitudes lineales con números. Aunque esto es algo que en la actualidad nos parece normal, sabemos que históricamente pasa por *la identificación del continuo geométrico con el continuo aritmético*. Resultado que sólo fue logrado en el crepúsculo del siglo XIX. De otro lado, la identificación de números y magnitudes nos permite incorporar, de manera natural, el producto entre magnitudes, el cual no es posible con la maquinaria euclidiana, y que le da sentido a la expresión "base por altura" a sabiendas de que la base y la altura representan los segmentos que limitan el rectángulo.

De esta forma podemos observar que la evolución de los procesos de medir tiene relación directa con el desarrollo de una reglilla numérica. Los números reales constituyen el marco referencial de una teoría abstracta de la medida. Sin embargo, es conveniente precisar que las construcciones de $\mathbb{R}$, por parte de Cantor y Dedekind, se basan en propiedades conjuntistas. En Cantor, los reales corresponden a *clases de equivalencia* de sucesiones de números racionales y en Dedekind a *cortaduras* de números racionales. Lo interesante de esto es que a partir de los resultados de Cantor, entre 1873 y 1900, empieza a conformarse la teoría de conjuntos como rama de las matemáticas. Entonces el problema de la medida cambia de matices, emergiendo *la exigencia de pasar del orden de las magnitudes* al *orden de los conjuntos*. Las magnitudes lineales corresponden a casos particulares de conjuntos ordenados. Un segmento euclidiano tiene su equivalente en un segmento conjuntista. Pero además de segmentos tenemos muchos otros tipos de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Decimos que $\mathbb{R}$ presenta una gran complejidad topológica. ¿Es posible tener una caracterización completa de $\mathbb{R}$, de tal suerte que podamos entender la esencia del continuo?

Los números reales axiomatizados

A partir de las construcciones de los números reales por parte de Cantor y Dedekind, a finales del siglo XIX, se tenía la convicción de que habíamos logrado capturar la naturaleza del continuo. El proceso de aritmetización desemboca en la teoría axiomática de $\mathbb{R}$, tal como se expone en el análisis moderno.

Desde esta perspectiva, se supone la existencia de $\mathbb{R}$, junto con dos operaciones llamadas suma y producto, de tal suerte que para cada par de números reales x, y se forman otros dos números reales designados por $x + y$ y $x \,.\, y$. Estas operaciones cumplen los siguientes axiomas:

Axiomas de cuerpo

1. $x + y = y + x\,,\ x \,.\, y = y \,.\, x$ (Conmutatividad).
2. $x + (y + z) = (x + y) + z\,,\ x \,.\, (y \,.\, z) = (x \,.\, y) \,.\, z$ (Asociatividad).
3. $x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$ (Distributividad).
4. $x + 0 = 0 + x = x;\ x \,.\, 1 = 1 \,.\, x = x$ (Existencia de elementos neutros).
5. $(\forall x)(\exists t)\ (x + t = 0)$; t se designa como $-x$ (El opuesto de x).
6. $(\forall x \neq 0)(\exists h)\ (x \,.\, h = 1)$; h se designa como $x^{-1} = \frac{1}{x}$ (El inverso de x).

Decimos entonces que, algebraicamente, $\mathbb{R}$ es un cuerpo.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto $\mathbb{R}^+$, de los números reales, $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado subconjunto de números positivos que cumplen los siguientes axiomas:

1. $0 \notin \mathbb{R}^+$.
2. $(\forall x, y)(x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $x.y \in \mathbb{R}^+$.
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(x = 0$ ó $x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+)$.

Tomando como referencia a $\mathbb{R}^+$ se define el orden entre reales: "x es menor que y" si $y - x$ es positivo. Simbólicamente, $x < y$ si $y - x \in \mathbb{R}^+$. Decimos que $x \leq y$ si $x < y$ ó $x = y$. Con base en la relación de orden se definen las cotas superiores, y el supremo de un conjunto:

Definiciones:
Sea $X \subset \mathbb{R}$.

a. $m \in X$ se denomina el mínimo de X, si $m \leq x$, para todo $x \in X$.
b. $M \in X$ se denomina el máximo de X, si $x \leq M$, para todo $x \in X$.
c. $c \in \mathbb{R}$ se denomina una cota inferior de X, si $c \leq x$, para todo $x \in X$.
d. $s \in \mathbb{R}$ se denomina una cota superior de X, si $x \leq s$, para todo $x \in X$.
e. Si existe la menor de las cotas superiores de A se denomina el *supremo de A*: *Sup A*.
f. Si existe la mayor de las cotas inferiores de A se denomina el *ínfimo de A*: *Inf A*.
g. Un conjunto se dice acotado superiormente cuando tiene cotas superiores.
h. Un conjunto se dice acotado inferiormente cuando tiene cotas inferiores.

A partir de estas definiciones podemos enunciar el último axioma de $\mathbb{R}$.

Axioma de completez

Todo subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$ tiene un supremo.

Observemos que la presentación axiomática no incorpora algoritmos para la suma y el producto. Sabemos que no hay mayor dificultad para la operatividad con racionales. Para los números irracionales se incorpora una nueva operación que es el paso al límite.

A pesar de que la axiomática constituye la presentación formal en la objetivación del continuo, la representación geométrica sigue estando como telón de fondo, pues se supone la existencia de una biyección entre el continuo aritmético y el continuo geométrico.

Desde la perspectiva de la instauración de una teoría de la medida de magnitudes, el establecimiento de $\mathbb{R}$ significaba que habíamos logrado construir una reglilla referencial tal que a cada magnitud acotada se le podía asignar un número real determinado.

Es un hecho que en el siglo XIX el problema de la medida de magnitudes había cambiado de matices; sin embargo, sigue la línea de evolución trazada por los antiguos griegos, fundamentalmente a través de los *Elementos* de Euclides.

Con la instauración de la geometría analítica, Descartes establece un cambio cualitativo en la manera de abordar los problemas matemáticos. Desde entonces lo analítico se convirtió en el medio idóneo para desterrar la intuición geométrica de los procesos de contar y medir.

Newton y Leibniz utilizaron la representación analítica para resolver el problema de las cuadraturas de figuras planas; para ello se sirvieron de la representación de las curvas a través de ecuaciones polinómicas y de las series de potencias. Sin embargo, sus procedimientos padecían de algunos problemas de rigor ocasionados por el uso de las cantidades infinitamente pequeñas.

El problema de fondo era plantear una operación que diera cuenta de los procesos infinitos desde el ámbito analítico. El concepto de límite parecía proporcionar una respuesta. El ingrediente complementario lo constituyó el concepto de función. En esta dirección, el problema antiguo que consistía en transformar una figura plana en un cuadrado se transformó en el problema de encontrar el área bajo una curva. El área es un número real positivo que corresponde a la medida de la figura. Las figuras planas rectilíneas no presentaban problema pues todas se podían transformar en rectángulos, para los cuales se tenía bien establecida la medida mediante el producto de la base por la altura. El problema era para las figuras no rectilíneas.

La salida conceptual al problema del área de figuras planas, en general, se dio a través de la noción de integral definida. La primera definición formal de integral se debe a Augustin-Louis Cauchy. En su *Curso de análisis*, Cauchy establece una noción de integral definida que acoge a las funciones continuas. Ya no se trata de resolver el problema geométrico de las cuadraturas, sino de establecer una nueva operación sobre las funciones.

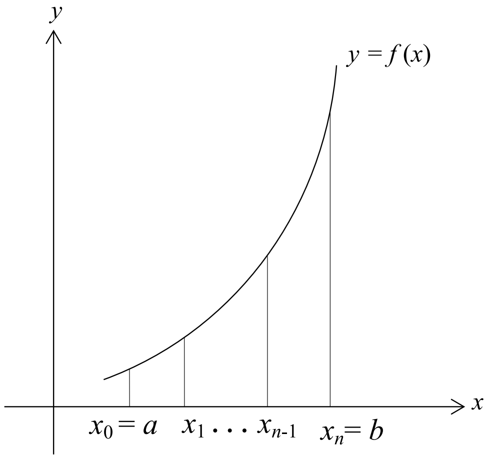
Cauchy parte de una función $y = f(x)$, continua entre los límites $x = x_0$, $x = X$. Tomando la partición $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = X$, obtiene la sucesión de diferencias, $x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., X - x_{n-1}$, y se define la suma: $S_n = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1})$.

De donde se tiene que S_n depende de n, y del máximo de $\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., X - x_{n-1}\} = \Delta x$.

La integral de $f(x)$ se obtiene mediante el límite de S_n cuando n tiende a infinito y cuando Δx tiende a cero. Simbólicamente:

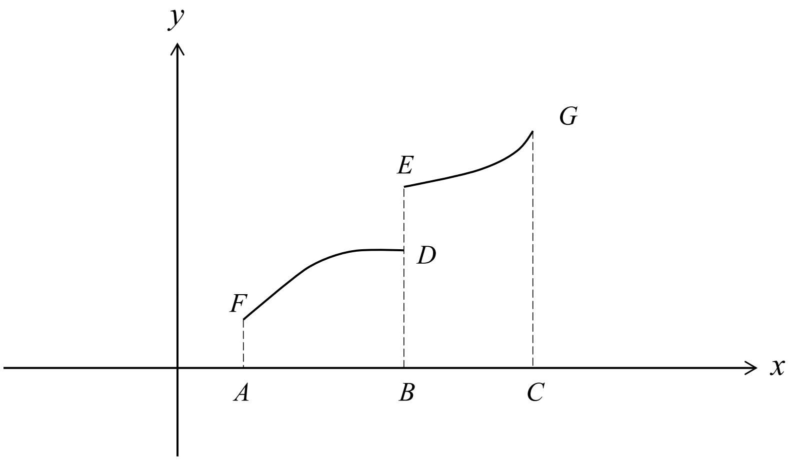
$$\int_x^X f(x)dx = \lim_{n\to\infty, \Delta x \to 0} S_n .$$

Lo interesante de esta definición es que cuando $f(x)$ es positiva, la integral corresponde al área bajo la curva y S_n corresponde a la suma de n rectángulos como muestra la figura siguiente.



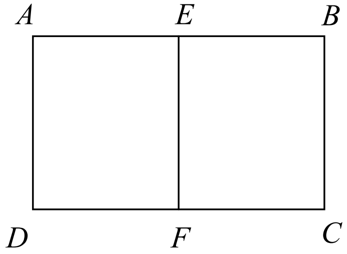
Sin embargo, en su *Curso de análisis*, el mismo Cauchy define funciones continuas y funciones discontinuas. ¿Cómo definir, entonces, la operación de integración para funciones discontinuas? Antes de abordar este interrogante pensemos en otro más genérico: ¿Por qué se hace necesario el tránsito de lo continuo a lo discontinuo?

En primer lugar, la matematización de los fenómenos físicos presentaba funciones que se comportaban de manera discontinua; a nivel geométrico significaba calcular el área total de una región como la suma de dos áreas parciales que compartían un segmento. Para explicar esto tomemos como base la siguiente figura, en la cual se tiene que la función está definida en los intervalos [*A*, *B*] y [*B*, *C*] de manera diferente, de tal forma que en $x = B$, la función es discontinua.



Se desea calcular el área de la figura compuesta por las regiones *AFDB* y *BEGC*, las cuales comparten el segmento *BD*. Como el área de un segmento es cero, el área total se calcula mediante la suma del área de la región *AFDB* y el área de la región *BEGC*.

Se establece aquí una aritmética de áreas que resguarda las propiedades de la geometría euclidiana, como la invarianza bajo traslaciones y la aditividad para el caso finito de áreas que comparten una o más líneas. Estas dos propiedades constituyen una herencia de la geometría euclidiana. Expliquemos esto recurriendo a la figura siguiente:



Para Euclides se tiene que,

Área del rectángulo *ABCD* = área del rectángulo *AEFD* +
área del rectángulo *EBCF*.

Si *DF* = *FC*, se tiene que:

Área del rectángulo *ABCD* = 2 veces el área del rectángulo *AEFD*.

Observemos que los dos rectángulos *AEFD* y *EBCF* comparten la línea *EF* y además son dos rectángulos que tienen la misma base y la misma altura. El rectángulo *AEFG* es el mismo rectángulo *EBCF*, pero en otro lugar. Euclides considera que los dos rectángulos tienen la misma área; es decir, su medida es la misma bajo traslaciones.

Hacia mediados del siglo XIX, el matemático alemán Bernard Riemann instauró una definición de integral que acogía funciones altamente discontinuas. En términos geométricos significaba la generalización de la noción de área a regiones a las cuales se les había "quitado" un número infinito de componentes. Aparecen entonces *patologías*, como en la función característica de los irracionales χ_{I}:

$$\chi_{\mathrm{I}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathrm{I} \end{cases}$$

Observemos que es imposible una representación geométrica de esta función, lo que quiere decir que no es posible interpretar la integral, $\int_0^1 x_I\,(x)dx$ como un área bajo la curva, porque no existe una región plana como tal. Pero podemos establecer el valor de la integral si nos imaginamos la representación de la función como un cuadrado de lado 1 al cual le quitamos los segmentos verticales paralelos con coordenadas racionales. Si pensamos en la operación de ir quitando segmentos del cuadrado, intuitivamente notamos que el área restante no debería sufrir variaciones porque, al fin de cuentas, se le están sustrayendo componentes que tienen área cero. De esta forma tendríamos que $\int_0^1 x_I\,(x)dx = 1$. La integral de Riemman no respondía a esta problemática.

No debemos pasar por alto algunos aspectos de lo que hemos planteado. Recordemos que la integral surge en la perspectiva de dar una salida teórica al problema de la medida de figuras planas. Pero en el caso de la función característica no tenemos una región plana. ¿Qué significa, entonces $\int_0^1 x_I\,(x)dx = 1$? Para entender la profundidad conceptual de este resultado es conveniente interpretar las regiones planas desde la perspectiva de lugar geométrico. De esta forma, un cuadrado de lado 1 será el lugar geométrico *L*:

$$L = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$$

De acuerdo con lo anterior, la representación geométrica de χ_{I} corresponderá al conjunto M:

$$M = \{(x, y) : x \in \mathrm{I}\ , 0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

La integral puede interpretarse como la medida de este conjunto.

Esto representó históricamente un cambio sustancial en el problema de la medida; ya no se trataba de medir figuras planas, sino conjuntos. *El problema se traslada del dominio de las magnitudes geométricas al dominio de los conjuntos.*

Pero si de medir conjuntos se trataba, había que solucionar, ante todo, el problema de la medida de conjuntos del continuo lineal, el cual se suponía determinado a partir de las construcciones de Cantor y Dedekind. ¿Cómo definir una función que le asigne a cada conjunto de puntos un número real, el cual sea su medida?

El primer intento de constituir una teoría abstracta de la medida se debe al matemático francés Emile Borel.

LA MEDIDA DE BOREL

Emile Borel dedica el capítulo III de sus *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898) a la definición de su teoría de la medida que hoy reconocemos como medida de Borel, mediante la cual introduce los llamados conjuntos borelianos o conjuntos B-medibles. La base fundamental del proceso de medir reposa, para Borel, en la generalización de la longitud de un segmento. La medida de un intervalo comprendido entre a y b será $b - a$; es decir, la longitud del intervalo. A partir de aquí empieza a ampliar el dominio de los conjuntos medibles. La medida de dos conjuntos sin puntos comunes, y con medidas s y s', es $s+s'$. Más generalmente, la medida de la unión de una infinidad numerable de conjuntos que no tienen puntos en común de dos en dos y con medidas $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, respectivamente, es $s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots$

En este sentido, dado que un punto $a \in \mathbb{R}$, corresponde al intervalo $[a, a]$, la medida de un punto debe ser cero. Esto implica que la medida de cualquier conjunto numerable es cero (un conjunto es numerable cuando tiene tantos elementos como los números naturales).

Para Borel, una teoría de la medida útil debe cumplir las siguientes propiedades fundamentales:

1. La medida de la suma de una infinidad numerable de conjuntos disjuntos, dos a dos, es igual a la suma de sus medidas.
2. La medida jamás es negativa.
3. Todo conjunto que no tiene medida nula no es numerable.

Dado que la medida representaba para Borel una generalización de la longitud de segmentos, es decir, de la medida de intervalos, entonces los conjuntos a tener en cuenta eran aquellos conjuntos formados a partir de los intervalos y las operaciones de unión finita, uniones numerables y sus complementos. La colección de ese tipo de conjuntos constituye los *conjuntos borelianos* o conjuntos B-medibles.

Sin embargo, hay conjuntos en $\mathbb{R}$ que no son borelianos. El número de conjuntos borelianos es infinito, pero es un infinito mucho menor que el infinito de $\wp(\mathbb{R})$, la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$. ¿Cuántos conjuntos no borelianos contiene $\mathbb{R}$? ¿Cómo caracterizar los conjuntos no borelianos? Estos son interrogantes que pertenecen al ámbito de una teoría de conjuntos infinitos, como se establece más adelante.

La teoría de conjuntos infinitos fue constituida por Georg Cantor hacia las dos últimas décadas del siglo XIX. El mismo Cantor ya había llamado la atención sobre algunos problemas que emergían de la instauración del continuo como objeto matemático. Esto es algo que vale la pena detallar un poco.

La teoría de conjuntos de Cantor

En general, es fácil aceptar la infinitud de los números naturales en el sentido de que no existe un número natural que sea el mayor de todos. Específicamente, dado un número natural, por grande que sea, basta aumentarle una unidad para obtener otro mayor. Siguiendo este proceso, podemos formar números tan grandes como queramos, sin agotarlos. Pero lo importante de todo esto es que no es necesario realizar el proceso completamente para aceptar la existencia de infinitos números naturales.

En primera instancia, parece entonces que no es problemático aceptar el significado de infinito como algo sin fin o lo que no es finito. En la medida en que no necesitemos una definición rigurosa, el infinito no plantea muchas dificultades.

Como hemos dicho antes, los números enteros positivos: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}$, históricamente constituyen la primera reglilla de contar. Pero, ¿qué es contar?

Tomemos, por ejemplo, los conjuntos A, B y C siguientes:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{x, y, z\}$$

$$C = \{s, t, u, v, w\},$$

y preguntémonos en cuál de ellos hay mayor número de elementos.

Para comparar conjuntos es necesario establecer correspondencias entre los conjuntos. Miremos esto:

I) $$\begin{array}{l}A = \{a, & b, & c\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B = \{x, & y, & z\}.\end{array}$$

Vemos que a cada elemento del conjunto A le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto B. También se cumple que a cada elemento del conjunto B le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto A. Esto significa que hay tantos elementos en el conjunto A como en el conjunto B.

II) $$\begin{array}{llll}A = \{a, & b, & c\} & \\ \quad\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ C = \{s, & t, & u, & v, w\}\end{array}$$

Los dos elementos v y w del conjunto C no tienen pareja. Ello significa que el conjunto C tiene un mayor número de elementos que el conjunto A.

Sin embargo, este proceso sólo nos sirve para poner en relación unos conjuntos con otros. Nosotros vamos más allá de este método gracias a que tenemos un conjunto referencial que nos sirve de modelo; se trata del *conjunto de los números naturales mayores que cero*:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}.$$

En los casos anteriores tenemos:

$$\begin{array}{llll}A = & \{a, & b, & c\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ & 1 & 2 & 3\end{array} \qquad \text{3 elementos.}$$

$$\begin{array}{llll}B = & \{x, & y, & z\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ & 1 & 2 & 3\end{array} \qquad \text{3 elementos.}$$

$$\begin{array}{llllll}C = & \{s, & t, & u, & v, & w\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array} \qquad \text{5 elementos.}$$

En matemáticas decimos que el *cardinal* de un conjunto es el número de elementos del conjunto. Así, el *cardinal del conjunto A es* 3, el *cardinal del conjunto B* es 3 y el *cardinal del conjunto C es* 5; simbólicamente:

$$car\,(A) = 3, \qquad car\,(B) = 3\,, \qquad car\,(C) = 5.$$

Analicemos el caso anterior en conjuntos infinitos y comparemos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y el conjunto de los pares $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{llllllll} \mathbb{N} = \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, \ldots, & n, & n+1, \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathbb{P} = \{0, & 2, & 4, & 6, & 8, \ldots & 2n, & 2(n+1), \ldots\}. \end{array}$$

$\mathbb{P}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ ($\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$), sin embargo se puede establecer una correspondencia biunívoca en el sentido de que a cada elemento de $\mathbb{N}$ le corresponde uno y sólo un elemento de $\mathbb{P}$. Es decir, a pesar de que el conjunto de los pares $\mathbb{P}$ está incluido en los naturales $\mathbb{N}$, hay tantos elementos en $\mathbb{P}$ como en $\mathbb{N}$: *car* ($\mathbb{P}$) = *car* ($\mathbb{N}$). Esto sólo ocurre con los conjuntos infinitos, en los cuales se tiene que el todo no es mayor que la parte.

Hacia finales del siglo XIX, Cantor demostró que si se generalizaba esta manera de contar, se podía demostrar la existencia de infinitos más grandes que otros.

Cantor empieza apoyándose en los trabajos de Bernard Bolzano, especialmente en su libro *Las paradojas del infinito* (Bolzano, 1991), el cual constituye la primera crítica directa a la manera en que se había tomado el infinito hasta el siglo XIX. En este libro, Bolzano presenta un cambio de actitud frente a la tradición aristotélica del infinito; no destierra el infinito actual[2], sino que lo retoma a pesar de su carácter paradójico. Cantor va más allá que Bolzano, demostrando que: *Existen diversos tamaños de infinito*.

Con esto, Cantor se alejaba de la creencia, que había perdurado durante más de veinte siglos, y que establecía la existencia de un solo infinito inalcanzable y no real.

Cantor partía de la negación del principio filosófico milenario, sustentado desde Euclides en sus *Elementos* como noción común 5, según el cual, el todo es más que una de sus partes. Para ello incorpora el concepto de potencia, que es la generalización del número de elementos de un conjunto, o número cardinal. De esta forma, dos conjuntos tendrán la misma potencia —son equipotentes— cuando se pueda establecer una relación biunívoca entre sus elementos; o, dicho de otra manera, cuando se pueda definir una función biyectiva entre los dos conjuntos.

Definición: Dos conjuntos A y B se dice que son *equipotentes* si se puede definir una función biyectiva, $f: A \rightarrow B$. En este caso se dice que los dos conjuntos se encuentran biunívocamente emparejados o que tienen el mismo número de elementos, esto es: *car* (A) = *car* (B).

[2] Mientras que el infinito potencial corresponde al infinito tomado como proceso, el infinito actual corresponde al infinito tomado como un todo.

De esta forma se puede demostrar que los números naturales son equipotentes con los pares, puesto que se puede definir la función biyectiva

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P},\ f(n) = 2n.$$

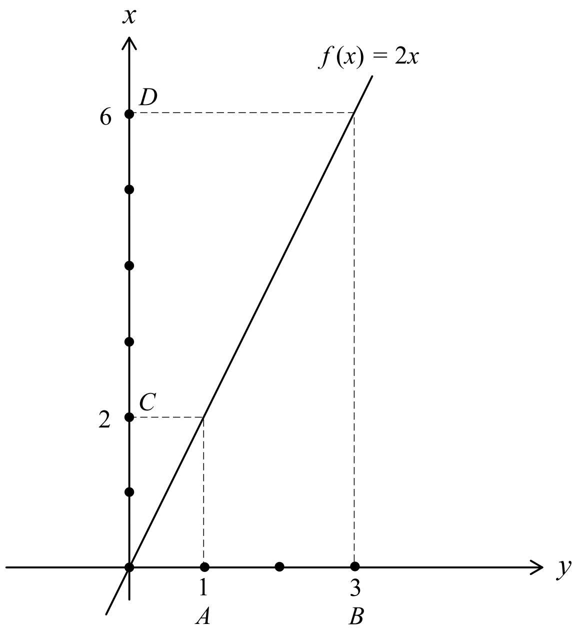
Su definición de conjunto infinito es una generalización de este resultado.

Definición: Un conjunto es infinito cuando es equipotente con un subconjunto propio.

En otras palabras, un *conjunto infinito* es aquel conjunto que posee una parte tan "numerosa" como el todo.

Usando argumentaciones similares se puede comprobar que la cantidad de puntos que hay en una recta es igual a la cantidad de puntos de un segmento, no importa que tan pequeño sea. Por ejemplo, tomemos los intervalos $AB = [1, 3]$ y $CD = [2, 6]$, los cuales corresponden geométricamente a segmentos de longitud 2 y 4, respectivamente. A pesar de que la longitud del intervalo AB es menor que la longitud del intervalo CD, se puede demostrar que tienen la misma cantidad de puntos. Para ello basta definir una correspondencia biunívoca entre los puntos del intervalo AB y los puntos del intervalo CD. En la gráfica siguiente se puede visualizar la situación en la cual se ha definido una función biyectiva de la siguiente manera:

$$f : [1, 3] \rightarrow [2, 6],\ f(x) = 2x.$$



Observemos que no importa qué tan grande sea la longitud del intervalo *CD*, siempre podemos definir una función biyectiva con el intervalo *AB*.

A través del concepto de potencia, Cantor demuestra que hay más números reales que naturales. Para ello recurre a la representación decimal y al método de reducción al absurdo, como lo detallamos a continuación. Supongamos que los números reales en el intervalo (0, 1) tienen la misma potencia que los números naturales. Eso significa que existe una función biyectiva entre los naturales y los reales; lo que quiere decir que la totalidad de los reales del intervalo en cuestión se pueden listar en una sucesión de la forma:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$$

Dado que cada uno de estos números está ubicados en el intervalo (0, 1) quiere decir que su expansión decimal consta de la parte entera igual a cero, y los podemos representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} r_1 = 0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \ldots \\ r_2 = 0.a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \ldots \\ r_3 = 0.a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \ldots a_{3n} \ldots \\ \qquad\vdots \\ r_n = 0.a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots \end{array}$$

Suponemos que en la lista se encuentran la totalidad de los reales del intervalo (0, 1). Formemos el número real,

$$b = 0.b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_n \ldots$$

tal que, $b_i \neq a_{ii}$, para todo i. Observemos que,

$$\begin{array}{l} b \neq r_1, \text{ porque } b_1 \neq a_{11} \\ b \neq r_2, \text{ porque } b_2 \neq a_{22} \\ b \neq r_3, \text{ porque } b_3 \neq a_{33} \\ \vdots \end{array}$$

Entonces b es diferente a todos los elementos de la lista $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$, lo cual contradice el hecho de que en la lista se encontraban “todos” los reales del intervalo (0, 1).

Los aspectos anteriores nos describen las dos siguientes propiedades de los conjuntos infinitos:

1. Hay infinitos más grandes que otros. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ son dos conjuntos infinitos, pero de diferente tamaño. El tamaño de $\mathbb{R}$ es mayor que el tamaño de $\mathbb{N}$.
2. Hay subconjuntos de los conjuntos infinitos que son de igual tamaño que el todo. Por ejemplo, los pares y los naturales tienen igual tamaño a pesar de que los pares son una parte de los naturales.

Esos dos aspectos dan al traste con dos opiniones del sentido común: la creencia de que hay un solo infinito y la idea de que el todo es mayor que la parte.

El segundo de los aspectos anteriores fue establecido por Euclides como axioma en la *noción común* 5. Para los conjuntos infinitos este axioma es reemplazado por una nueva noción que relaciona los subconjuntos del conjunto con el conjunto mismo. Si designamos como $\wp(A)$ al conjunto formado por todos los subconjuntos de A, denominado *partes de A*, se tiene que:

$$car\ (\wp(A)) > car\ (A).$$

Si partimos del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, se puede construir un conjunto mayor tomando el conjunto de sus partes:

$$car\ (\wp(\mathbb{N})) > car\ (\mathbb{N}).$$

Luego se toma como partida $\wp(\mathbb{N})$ y se construye otro mayor tomando $\wp(\wp(\mathbb{N}))$; y así, sucesivamente.

Para designar la “cantidad” de elementos de un conjunto infinito, Cantor utilizó la primera letra del alfabeto hebreo, la lengua sagrada por antonomasia, llamada aleph y representada por el signo $\aleph$. $\aleph_0$ representa la totalidad de los números naturales:

$$car\ (\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

Cantor entendió muy bien que la cardinalidad era un concepto que dejaba por fuera algunas cuestiones que tienen que ver con cambios cualitativos. En este sentido diferenció el *orden* de la *cantidad*. Si bien los cardinales transfinitos daban cuenta de la cantidad, faltaba otro tipo de números que dieran cuenta del orden. Para establecer una definición formal de los números ordinales, Cantor se basó en dos principios básicos: la operación de adición de unidades y la adopción de sucesiones divergentes. Por el primer principio se obtiene la secuencia: 0, 1, 2, 3, ..., *n*, ... de nuestros números naturales. Esta sucesión es divergente. Cantor no encuentra contradicciones en el hecho de incorporar un nuevo número que fuera el mayor de todos los naturales, el cual designó con el símbolo ω. A partir de ω podía obtener nuevos ordinales mediante la adición de unidades, y nuevamente aplicarle el límite, de tal suerte que se podía obtener una cadena infinita de ordinales:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \omega 2+3, \ldots,$$

luego vienen $\omega 3$, $\omega 4$, $\omega 5$, ... después de todos estos seguirá ω^2, donde se inicia nuevamente el proceso:

$$\omega^2, \omega^2+1, \omega^2+2, \ldots, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \omega^2+\omega+2, \ldots, \omega^2+2\omega, \omega^2+2\omega+1, \ldots,$$

$$\omega^2+3\omega, \ldots, \omega^2+4\omega, \ldots, \omega^2 2, \ldots, \omega^2 3, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^4, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{(\omega^\omega)}, \ldots, \omega^{(\omega^{\omega^\omega})}, \ldots$$

Si definimos como: $\varnothing = 0$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, ..., $\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\omega+1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$... observemos que tanto el cardinal de ω como el de $\omega+1$, son iguales al cardinal de los números naturales. De esta forma se pueden formar clases de conjuntos de la siguiente manera:

1. La primera clase de números (I): formada por los naturales.
2. La segunda clase (II): un ordinal α es un número de la clase (II), si el conjunto conformado por los ordinales que le preceden a α tiene la misma potencia que los naturales; es decir, tiene cardinalidad $\aleph_0$.

Cantor toma el conjunto *W*, formado por todos los ordinales transfinitos de la clase (II), y demuestra que tiene una cardinalidad mayor que $\aleph_0$; además demuestra que no hay ningún otro cardinal entre $\aleph_0$ y el cardinal del conjunto formado por los ordinales de la clase (II). A este ordinal Cantor lo designó como $\aleph_1$, corresponde a un cardinal mayor que $\aleph_0$; es decir:

$$car\,(\mathbb{N}) = \aleph_0 < \aleph_1.$$

Utilizando el mismo método de generación, Cantor fue construyendo una escalera de infinitos cada vez más grandes:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \quad . \quad . \quad .$$

A los alephs se les llama cardinales transfinitos o números infinitos.

Como hemos enunciado antes $car\,(\mathbb{R}) > car\,(\mathbb{N})$ y $car\,(\wp(\mathbb{N})) > car\,(\mathbb{N})$. Podemos demostrar que $car\,(\mathbb{R}) = car\,(\wp(\mathbb{N}))$ y por lo tanto $car\,(\wp(\mathbb{N})) = car\,(\mathbb{R}) \geq \aleph_1$. Los esfuerzos de Cantor se centraron en adelante en responder la pregunta: ¿Cuál es el cardinal del continuo? Supuso que la potencia del continuo era $\aleph_1$; pero jamás lo pudo demostrar, dejándolo como hipótesis. Es lo que se denomina: *hipótesis del continuo*. Afortunadamente, en sus esfuerzos tendientes a responder esta pregunta, Cantor estableció algunas características importantes de $\mathbb{R}$.

Cantor había empezado sus investigaciones sobre conjuntos infinitos estudiando la unicidad de las series trigonométricas. En la solución de este problema Cantor se ve en la necesidad de clasificar conjuntos de puntos infinitos en intervalos acotados, lo cual le lleva directamente al teorema de Bolzano-Weierstrass sobre la existencia de puntos de acumulación.

Definición: Sea un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}$, es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, se cumple que $(x - r, x + r)$ tiene infinitos puntos de A.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Todo conjunto infinito acotado tiene, al menos, un punto de acumulación.

El concepto de punto de acumulación constituye el soporte de la teoría de conjuntos de Cantor. Con base en él, Cantor define los conjuntos derivados.

Dado un conjunto arbitrario P, Cantor designó por P' al conjunto de puntos de acumulación de P. Luego establece las siguientes convenciones:

a. Sea P' el conjunto de puntos de acumulación de P o primer derivado.
b. Sea P'' el conjunto de puntos de acumulación de P' o segundo derivado; y así, sucesivamente ...
c. $P^{(n)}$ es el conjunto de puntos de acumulación de $P^{(n-1)}$ o enésimo derivado**.**

En seguida, Cantor define los conjuntos de puntos de **primera especie**, como aquellos para los cuales existe un n tal que $P^{(n)} = \varnothing$. En el caso de que $P^{(n)}$ sea distinto de $\varnothing$ para todo n, los denominó de **segunda especie**.

Como antes, Cantor retoma los conjuntos derivados e introduce la noción de unión e intersección. La intersección la utiliza para definir P^{∞}:

$$P^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$$

A partir de aquí define otros derivados "superiores".

En 1883, Cantor establece algunos resultados importantes a partir de los *conjuntos perfectos*.

Definición: *Un conjunto P es perfecto si es igual a su derivado*; *es decir, $P = P'$.*

Por ejemplo, el intervalo cerrado [0, 1] es perfecto porque cada punto es un punto de acumulación.

El hecho de que $\mathbb{R}$ sea un conjunto perfecto y que todo conjunto perfecto no vacío sea no numerable, llevó a pensar a Cantor que esta propiedad podía caracterizar el continuo. Sin embargo, el mismo Cantor encontró un conjunto perfecto que no era un continuo. Se trata del *conjunto triádico* que hoy lleva su nombre.

Para formar el *conjunto triádico* de Cantor se parte del intervalo $I = [0,1]$ y lo divide en tres partes por los puntos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, removiendo el intervalo $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ de I. A continuación se divide cada uno de los dos intervalos resultantes $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3},1\right]$ en tres intervalos iguales y se remueve cada uno de los intervalos centrales. El proceso continúa indefinidamente. El conjunto resultante se denomina conjunto de Cantor, C. De acuerdo con lo anterior:

$$C = I - \left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right) \cup \ldots\right\}$$

Cantor intenta establecer un conjunto de propiedades que sean condiciones necesarias y suficientes en la caracterización del continuo aritmético $\mathbb{R}$. Para ello incorpora la noción de conexo.

Definición: Sea un conjunto $P \subset \mathbb{R}$. *Decimos que P es conexo si para todo par de puntos a_1, a_2, de P, se cumple que el intervalo* $[a_1, a_2]$ *es un subconjunto de P*: $[a_1, a_2] \subset P$.

La noción de conjunto conexo describe a aquellos conjuntos que intuitivamente son de "una pieza", característica de la cual goza el continuo lineal y que puede demostrarse para $\mathbb{R}$. Cantor llega, entonces, a la conclusión de que $\mathbb{R}$ es un conjunto perfecto, denso y conexo, sin embargo hay conjuntos diferentes a $\mathbb{R}$ que tienen estas tres propiedades, como el intervalo $[0, \infty)$.

¿Qué es, entonces, aquello que caracteriza el continuo aritmético?

La teoría de medida de Lebesgue

Aunque la teoría de conjuntos infinitos de Cantor no tuvo una acogida inmediata, los desarrollos de los analistas franceses, especialmente por parte de René Baire, Emile Borel y Henri Lebesgue, mostraron su importancia. Es un hecho que la moderna teoría de funciones no habría podido desarrollarse sin la teoría del infinito actual establecida por Cantor, en especial aquellos resultados que tienen relación con la teoría de la medida. Recordemos que hacia principios del siglo XX, el problema de la medida de magnitudes se transforma en el problema de la medida de conjuntos.

Borel finaliza el capítulo III de sus *Leçons sur la théorie des fonctions* mostrando dos resultados determinantes en la caracterización de $\mathbb{R}$. Por un lado, demuestra que todos los conjuntos perfectos y acotados son medibles. Por otra parte, llama la atención sobre el hecho de que la potencia del conjunto formado por todos los subconjuntos del intervalo [0,1] tiene una potencia mayor que la potencia del continuo. Además, el conjunto de todos los conjuntos perfectos sólo tiene la potencia del continuo, al igual que el conjunto de todos los borelianos, como lo observa Lebesgue en su tesis doctoral, y en sus *Lecciones de análisis* (1904). Puesto que la potencia de los subconjuntos de [0,1] es mayor que la potencia del continuo, existirán conjuntos que no son B-medibles. Lebesgue introduce entonces su propia definición de medida.

Para Lebesgue, el problema de la medida consiste en asignarle a cada conjunto acotado un número mayor o igual a cero, que se denomina su medida, bajo las siguientes premisas:

1. Existe un conjunto cuya medida es diferente de cero.
2. La medida es invariante bajo traslaciones.
3. La medida de la unión de un número finito o numerable de conjuntos, disjuntos dos a dos, es la suma de las medidas de los conjuntos.

La teoría de la medida, introducida por Lebesgue (1902) en su tesis doctoral *Integral, longitud, área*, constituye, de alguna manera, uno de los puntos culminantes de nuestro itinerario inicial que tenía como mira dar cuenta de los procesos de medir y contar en el pensamiento matemático occidental.

Desde el punto de vista analítico, para Lebesgue el problema de la medida consiste en asignarle a cada conjunto acotado un número mayor o igual a cero. Más concretamente, se trata de definir una *función m*, llamada función medida, m:{conjuntos acotados de R} $\rightarrow R_0^+$, que satisfaga las siguientes condiciones:

1. $m(E) \neq 0$, para algún E.

2. $m(E) = m(E + a)$, donde $E + a = \{x + a : x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}\}$.

3. $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, con $E_i \cap E_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

Para Lebesgue, estas tres propiedades sintetizan el desarrollo histórico de la actividad de medir. La primera evita la trivial función cero, que no reflejaría la actividad tradicional de asignarle un número, diferente de cero, a la medida de los objetos; esto es, la longitud en el caso de los segmentos, el área en las superficies y el volumen en el caso de los sólidos. La segunda propiedad enmarca uno de los elementos distintivos de la geometría euclidiana, como lo es la invarianza bajo traslaciones. La tercera propiedad, conocida como aditividad, deja traslucir la habitual forma de sumar magnitudes, adjuntando una a continuación de la otra y tomando la totalidad como una sola. En realidad tendría el inconveniente de compartir los elementos de nexo, pero estos objetos tienen medida cero en cada una de las dimensiones; esto es, los puntos no tienen longitud, las líneas no tienen área y las superficies no tienen volumen.

Lebesgue procede generalizando el concepto de longitud para conjuntos lineales, el concepto de área para conjuntos del plano y el concepto de volumen para conjuntos en el espacio. Para ello recurre a las nociones de medida exterior y medida interior para un conjunto E. Este proceso se describe a continuación.

Para el caso de los conjuntos lineales, la medida del intervalo (a, b) o del intervalo $[a, b]$ es $b - a$. Sea un conjunto abierto $A \neq \emptyset$, acotado. Dado que A puede ser obtenido a través de la unión finita o numerable de una familia de intervalos abiertos, disjuntos de dos en dos, $A = \cup_n (a_n, b_n)$ se tiene que $m(A) = \sum_n (b_n - a_n)$

Sea un conjunto cerrado $C \neq \emptyset$, acotado. Dado que C es acotado puede formarse el intervalo cerrado $[A, B]$, de menor longitud, que contenga a C, lo cual quiere decir que $D = [A, B] - C$ es un conjunto abierto; de esta forma $m(C) = B - A - m(D)$.

En seguida Lebesgue incorpora sus nociones de medida exterior e interior.

Definición: La medida exterior m_e, de un conjunto acotado E, es la cota inferior más pequeña del conjunto formado por las medidas de todos los conjuntos abiertos acotados que contienen al conjunto E:

$$m_e(E) = \inf_{E \subset G} \{m(G): G \text{ abierto}\}$$

Definición: La medida interior $m_i(E)$ de un conjunto acotado E es la cota superior más pequeña del conjunto formado por las medidas de todos los conjuntos cerrados contenidos en E:

$$m_i(E) = \sup_{F \subset E} \{m(F): F \text{ cerrado}\}$$

Definición: Un conjunto acotado E se dice medible si $m_e(E) = m_i(E)$.

Cuando un conjunto es medible en el sentido anterior se dice que es Lebesgue-medible o simplemente L-medible. Lebesgue demuestra que existen conjuntos que son L-medibles pero que no son B-medibles.

Las limitaciones de la medida de Lebesgue

La definición de la medida de Lebesgue parecía ser el punto culminante del trayecto trazado por Occidente, buscando dar una respuesta formal al problema de medir y contar. Sin embargo, el mismo Lebesgue se plantea la posibilidad de la existencia de conjuntos no medibles. En su libro *Lecons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives,* de 1904, Lebesgue se refiere a los conjuntos que no son L-medibles de la siguiente manera:

> [...] es solamente para estos conjuntos [L-medibles] que nosotros estudiaremos el problema de la medida. Yo no sé si se pueda definir, ni siquiera sé si existen otros conjuntos que los conjuntos medibles; si existen, sé que lo dicho en el texto no es suficiente para afirmar o no que el problema de la medida es posible, ni que es imposible para estos conjuntos […]. En cuanto a la pregunta de la existencia de conjuntos no medibles, ella es apenas un adelanto después de la edición de este libro. Toda vez que esta existencia sea cierta para aquellos que admiten un cierto modo de razonamiento basado sobre lo que se llama el axioma de Zermelo [axioma de elección]. Por este razonamiento, llegamos a la siguiente conclusión: Sí existen los conjuntos no medibles; mas esta afirmación no se debe considerar como contradictoria si logramos mostrar que ningún hombre será capaz de encontrar un conjunto no medible (Pier, 1996, p. 122).

Con esta afirmación, Lebesgue está llamando la atención sobre un problema central de la historia de las matemáticas que tiene relación con el problema de la ontología de los objetos matemáticos. ¿Cuáles procesos permiten constituir objetos matemáticamente significativos? A partir de 1904, con la aparición de las teorías axiomáticas de conjuntos, se incorporan algunos axiomas que no daban lugar a procesos constructivos. En este sentido el axioma más controversial es el axioma de elección (este axioma, denominado también axioma de Zermelo, se describe en el siguiente apartado).

Muchos matemáticos notaron que su aceptación le abría la puerta a objetos que ignoraban los procesos constructivos. Justamente a partir del axioma de elección se puede exhibir un conjunto que no es L-medible.

La teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel

Dada la eficacia de los planteamientos de Cantor, a finales del siglo XIX algunos matemáticos trataron de sentar las bases de la matemática a partir de la teoría de conjuntos. Entre estos matemáticos se destaca Gottlob Frege quien emprendió esta empresa proponiendo una axiomática de la teoría de conjuntos. Infortunadamente, Bertrand Russell, en 1901, encontró una contradicción en sus trabajos: la llamada Paradoja de Russell. A partir de ese evento surgen distintos intentos, siendo hoy el más aceptado el denominado *Sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección C*, formulados por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel, habitualmente referidos como *ZFC*.

En la teoría de Cantor, es posible formar un conjunto a partir de una propiedad determinada que deben cumplir sus elementos. En otras palabras, dada cualquier propiedad P, existe un conjunto cuyos elementos son precisamente los objetos que verifican P. En símbolos, este conjunto se representa por $\{x : P(x)\}$. Así, por ejemplo, considerando la fórmula $a = a$, podemos definir el conjunto $T = \{x : x = x\}$, que claramente lo contiene todo. A este conjunto no se le pueden aplicar algunos de los resultados de Cantor, pues se producen algunas paradojas.

Un ejemplo, muy conocido, de conjuntos que producen paradojas es el llamado *conjunto de Russell*. Consideremos el conjunto X cuyos elementos son aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos. Esto es, el conjunto $X = \{x : x \notin x\}$

La paradoja de Russell surge al preguntarse: ¿es X un elemento de sí mismo? Si lo es, es decir, si $X \in X$, entonces X no satisface la condición, y por lo tanto $X \notin X$. Si $X \notin X$, entonces X satisface la condición para ser uno de sus elementos, y así $X \in X$. De esta forma tenemos que $X \in X$, si y sólo si $X \notin X$, lo cual es una contradicción.

En un intento de eliminar esta paradoja, Russell y Whitehead desarrollaron la teoría de tipos y la expusieron en su libro *Principia Mathematica*. Esta teoría tenía algunos puntos obscuros que la hacían poco manejable. La respuesta que más se adaptó a los requerimientos se dio a partir de las teorías axiomáticas.

Todo sistema axiomático de la Teoría de los Conjuntos parte de una regla que determine las condiciones de igualdad entre conjuntos y otras reglas para formar conjuntos. La primera teoría axiomática de conjuntos se debe a Zermelo, quien en 1908 enunció ocho axiomas:

1. Axioma de extensión.
2. Axioma de existencia.
3. Axioma de pares.
4. Axioma de la gran unión.
5. Axioma del conjunto potencia.
6. Axioma de comprensión.
7. Axioma de elección.
8. Axioma de infinitud.

Sin embargo, después de un tiempo se mostró que la existencia de algunos conjuntos no se garantiza con estos ocho axiomas. En 1922 Abraham Fraenkel adicionó un noveno axioma denominado *axioma de sustitución*. Los nueve axiomas conforman el llamado sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (sistema *ZFC*).

1. ***Axioma de extensión:*** Dos conjuntos X, Y son *iguales* si y sólo si contienen los mismos elementos.
2. ***Axioma de existencia:*** Existe un conjunto (representado por Ø) que no tiene elementos.
3. ***Axioma de pares:*** Dados dos conjuntos X, Y, existe otro conjunto: $\{X, Y\}$, cuyos elementos son únicamente X y Y.
4. ***Axioma de la gran unión:*** Dada cualquier colección de conjuntos $\mathcal{C}$, existe un conjunto, representado por $\cup\mathcal{C}$, y llamado *unión* de $\mathcal{C}$, que contiene todos los elementos de cada conjunto de $\mathcal{C}$.
5. ***Axioma del conjunto potencia:*** Para cualquier conjunto X existe otro conjunto, representado por $\wp(X)$, que contiene todos los subconjuntos de X.
6. ***Axioma de comprensión:*** Si $P(x)$ es una propiedad de x. Dado un conjunto X, existe un conjunto Y tal que $x \in Y$ si y sólo si $x \in X$ y $P(x)$.
7. ***Axioma del infinito:*** Existe un conjunto X tal que $\varnothing \in X$ y si $y \in X$, entonces $y \cup \{y\} \in X$.
8. ***Axioma de elección:*** Dada una familia de conjuntos no vacíos, se puede formar un nuevo conjunto compuesto por uno y sólo un elemento de cada conjunto de la familia.
9. ***Esquema axiomático de reemplazo:*** Si f es una función, entonces para todo conjunto X, existe el conjunto $Y = \{f(x) : x \in X\}$.

La teoría de conjuntos y la construcción de $\mathbb{R}$

Un conjunto en sí mismo no constituye un conjunto numérico. Históricamente, el apelativo numérico se establece cuando podemos definir las operaciones y relaciones entre los elementos del conjunto. En general, las operaciones aritméticas (suma y producto) y una relación de orden, la cual nos permite determinar cuándo un elemento del conjunto es menor que otro. Al inicio de este capítulo enunciamos una relación de orden para $\mathbb{R}$, la cual es un caso particular de una relación de orden definida sobre un conjunto en general.

Definiciones: Sea A un conjunto.

(a) *Una relación entre elementos de un conjunto A con ellos mismos, simbolizada por* < (se lee "menor que"), *se llama relación de orden estricto si cumple las siguientes propiedades:*
   1. *Transitiva: Sean a, b y c elementos de A. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*
   2. *Asimétrica: Sean a y b elementos de A. Si $a < b$ no puede darse $b < a$.*

(b) *Cuando escribimos $a > b$* (se lee "mayor que") *significa $b < a$. La expresión $a \leq b$ significa $a < b$ o $a = b$.*

(c) Una relación de orden se llama un orden total o también orden lineal, si dados dos elementos cualesquiera a y b del conjunto se cumple una de las tres condiciones: a < b ó b < a ó a = b.
(d) La expresión (A,<) representa el conjunto A dotado del orden <.

Tal como al inicio, dado un orden < en A y $X \subset A$, podemos definir los conceptos de *mínimo de A*, *máximo de A*, *cota superior de A*, *cota inferior de A*, *supremo de A* e *ínfimo de A*.

A partir de los axiomas de la teoría de conjuntos *ZFC* e incorporando las operaciones suma y producto y una relación de orden, se puede construir lo que históricamente hemos designado el continuo numérico $\mathbb{R}$.

Si partimos del axioma de existencia, contamos con el conjunto $\varnothing$. A partir del axioma del par, obtenemos el conjunto $\{\varnothing, \varnothing\}$ que, por el *Axioma de Extensión*, es igual a $\{\varnothing\}$.

A partir de $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$, podemos incorporar el conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Con base en este nuevo conjunto y utilizando los otros axiomas podemos definir la secuencia siguiente, con su respectiva simbolización acostumbrada:

$\varnothing = 0$
$\{\varnothing\} = 1$
$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 2$
$\{\varnothing, \{\varnothing\},\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = 3$
.
.
.

El axioma del infinito permite definir el conjunto de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}.$$

En $\mathbb{N}$ se definen las operaciones usuales de suma y producto. Además se define una relación de orden en términos de pertenencia, pues cada número es un conjunto.

Definición: Sean $m, n \in \mathbb{N}$, decimos que $m < n$ o, lo que es lo mismo, $n > m$, si $m \in n$.

Para la incorporación de los enteros, los racionales y los reales, recurrimos a la noción de clase de equivalencia.

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos X y Y, definimos el producto cartesiano de X por Y como:

$$X \times Y = \{(x,y): x \in X, y \in Y\}$$

Una relación R entre elementos del conjunto X con los del conjunto Y es un subconjunto de $X \times Y$. Cuando $(a, b) \in R$, escribimos aRb.

Relación de equivalencia

Sea X un conjunto. $E \subset X \times X$ es una relación de equivalencia si cumple las tres siguientes propiedades:

1. Para todo $x \in X$, $(x,x) \in E$, es decir xEx (E es reflexiva).
2. Si xEy, entonces yEx (E es simétrica).
3. Si xEy y yEz, entonces xEz (E es transitiva).

Las relaciones de equivalencia permiten formalizar relaciones entre números y proporcionarles el estatuto de números. Recordemos que uno de los problemas de la teoría de razones de Euclides era que las razones no poseían estatus numérico y por lo tanto no era posible operar con ellas. A partir de las relaciones de equivalencia se define la noción de clase de equivalencia y se van extendiendo universos numéricos a partir de los previamente existentes.

Clase de equivalencia

Sea X un conjunto **y** $E \subset X \times X$ una relación de equivalencia; para todo $x \in X$, se define la clase de equivalencia de x, simbolizada por $[x]_E$ como:

$$[x]_E = \{y \in X : xEy\}.$$

Si partimos de la existencia del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, con las operaciones de suma y producto usuales, podemos incorporar los números enteros $\mathbb{Z}$ definiendo una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Recordemos que en $\mathbb{N}$ la operación resta $m - n$ tiene sentido cuando $m > n$; en este caso decimos que $m - n = p$ si y sólo si $m = n + p$, lo cual significa que hemos definido la resta con base en la suma. La siguiente relación de equivalencia permite extender la operación resta a cualquier pareja de números naturales y al resultado concederle el estatus de número.

Definición: *Sean n, m, p* y *q números naturales, decimos que la pareja* (n, m) *está relacionada con la pareja* (p, q), mediante la relación E si y sólo si $n + q = m + p$. Esto es $(n, m)\, E(p, q)$ si y sólo si $n + q = m + p$.

Observemos que dada una pareja determinada, por ejemplo (4, 1), ella está relacionada con las parejas (7, 4), (3, 0) y en general con todas las parejas (a, b) tales que $b - a = 4 - 1 = 3$. En este sentido podemos identificar la clase de equivalencia de la pareja (4, 1) con el número 3. Si tomamos la pareja (1, 4), siguiendo los argumentos anteriores, decimos que corresponde al -3, el cual no pertenece a $\mathbb{N}$. Podemos entonces conformar el conjunto

$\{[(n, m)]_E : (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$, denominado el conjunto de los números enteros, simbolizado por $\mathbb{Z}$.

De esta forma, cada número entero $\mathbb{Z}$ se puede identificar con la clase $[(n, 0)]_E$, $n \in \mathbb{N}$, o con la clase $[(0, n)]_E$, $n \in \mathbb{N}$. Cada clase de la forma $[(n, 0)]_E$ se puede identificar con el número natural n y la clase $[(0, n)]_E$ se identifica con el símbolo $-n$. Esta identificación se denomina *representación canónica* de $\mathbb{Z}$.

En $\mathbb{Z}$ se definen la suma "$\oplus$" y el producto "$\otimes$" de la siguiente forma:

1. $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$, donde + es la suma entre naturales.
2. $(a, b) \otimes (c, d) = (a.c+b.d, a.d+b.c)$, donde las operaciones + y **.** son entre naturales.

No es difícil demostrar que si efectuamos las operaciones de la manera típica en $\mathbb{Z}$, llegamos a los mismos resultados, incluyendo la regla de los signos, en este sentido podemos usar el símbolo "+" en lugar del símbolo $\oplus$ para la suma, y el símbolo "**.**" en lugar del símbolo $\otimes$ para el producto.

Además, por la forma como hemos definido $\mathbb{Z}$ se establece, de manera natural, la relación de orden.

Definición: *Sean los números enteros* $x = [(n, m)]_E$, $y = [(p, q)]_E$, *decimos que* $x < y$ si y sólo si $n + q < m + p$.

La representación canónica de $\mathbb{Z}$ permite escribir sus elementos en la secuencia:

$$\ldots -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots$$

Que nos lleva a las presentaciones conjuntistas:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Los elementos del conjunto $\mathbb{Z}^+$ corresponden a los enteros positivos, mayores que cero; esto es, si $x \in \mathbb{Z}^+$, entonces $x > 0$. Este conjunto es cerrado bajo las operaciones de suma y producto; esto es: Si $x, y \in \mathbb{Z}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{Z}^+$ y $x \,.\, y \in \mathbb{Z}^+$.

Utilizando los elementos de $\mathbb{Z}$, definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$.

Definición: *Sean n, m, p y q números enteros, tales que m y q son diferentes de cero, decimos que la pareja* (n, m) *está relacionada con la pareja* (p, q) *si* $n.\, q = m.\, p$.

La pareja de números enteros (8, 4) está relacionada con las parejas (16, 8), (10, 5), y en general con todas las parejas (m, n) tales que $m = 2n$, es decir $\frac{m}{n} = 2$. Ello significa que podemos identificar la clase de equivalencia de la pareja (8, 4) con el número entero 2. Si en cambio tomamos la pareja (1, 4), siguiendo los argumentos anteriores decimos que corresponde al número $\frac{1}{4}$, el cual no pertenece a $\mathbb{Z}$. Nuevamente la relación de equivalencia nos ha permitido "producir" nuevos números, los cuales acogemos en otro conjunto denominado los números racionales, que simbolizamos por la letra $\mathbb{Q}$.

Observemos que las parejas de enteros no son, en sí mismas, números. Cada número racional es una clase de equivalencia; así, la pareja (8, 3) que constituye el número $\frac{8}{3}$, también representa a la pareja (16, 6), lo cual es congruente con el hecho de que $\frac{16}{6} = \frac{8}{3}$; pero si interpretamos esta igualdad en el sentido del libro VII de los *Elementos* de Euclides, estamos frente a una proporción. Esto es algo muy profundo históricamente; significa que le hemos inyectado características numéricas a las razones. Recordemos que éste era el problema planteado por Euclides y que le impedía tomar una razón como número.

Así planteadas las cosas, es común hablar del número racional $\frac{m}{n}$, m, n en $\mathbb{Z}$, n distinto de cero, a sabiendas de que este número representa a una infinidad de números equivalentes a él. Por esta razón es habitual definir al conjunto de los racionales, representado por $\mathbb{Q}$, como,

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}.$$

Las operaciones en $\mathbb{Q}$ se definen con base en las operaciones en $\mathbb{Z}$ y siguen las directrices típicas:

1. $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p.s+q.r}{q.s}$
2. $\frac{p}{q} * \frac{r}{s} = \frac{p.r}{q.s}$

Dado que las operaciones en $\mathbb{Q}$ se han definido con base en las operaciones en $\mathbb{Z}$, podemos definir el conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los racionales positivos:

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : p, q \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

En $\mathbb{Q}$ se define una relación de orden de la siguiente manera:

Definición: Sean $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \prec y$ si y sólo si $y - x \in \mathbb{Q}^+$.

Observe que hemos usado el símbolo "$\prec$" para establecer la relación de orden en $\mathbb{Q}$, sin embargo, dado que cada elemento $x \in \mathbb{Z}$, se puede expresar como $x = \frac{x}{1}$, el cual es un elemento de $\mathbb{Q}$, utilizaremos "<" en lugar de "$\prec$" para simbolizar la relación de orden en $\mathbb{Q}$ y además convierte a $\mathbb{Z}$ en un subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Con esta relación de orden se puede demostrar que $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso, lo cual quiere decir que entre dos números racionales siempre hay otro racional. Por ejemplo, si p y q son dos números racionales se tiene que $p < \frac{p+q}{2} < q$; es claro que $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$.

Para definir los números reales se recurre al concepto de cortadura sobre $\mathbb{Q}$ tipo Dedekind.

Definición: *Una cortadura sobre* $\mathbb{Q}$, *es un par* (A, B) *de conjuntos tales que*:

1. $A \subset \mathbb{Q}, B \subset \mathbb{Q}, A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = \mathbb{Q}$
2. Si $a \in A$ y $b \in B$, *entonces* $a < b$.

Cada número racional r produce la cortadura (A_1, B_1) en $\mathbb{Q}$:

$$A_1 = \{a \in \mathbb{Q}: a \leq r\}$$

$$B_1 = \{a \in \mathbb{Q}: a > r\}$$

Lo interesante de esta definición es que se pueden definir cortaduras que no son producidas por números racionales; este es el caso de la cortadura (A, B):

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2 \text{ ó } a \leq 0\}$$

$$B = \{a \in \mathbb{Q} : a > 0 \text{ y } a^2 > 2\}.$$

Dado que no existe un número racional que elevado al cuadrado dé como resultado 2, esta cortadura de $\mathbb{Q}$ no es producida por un número racional. El conjunto A es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que tiene una característica muy importante: tiene cotas superiores, pero carece de supremo. En este caso decimos que $\mathbb{Q}$ no es completo. En términos generales, un conjunto numérico, dotado de una relación de orden, es completo si todo conjunto que tiene cotas superiores tiene supremo.

Definición: Al conjunto de todas las cortaduras de $\mathbb{Q}$ se denomina el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$; esto es, si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x = (A, B)$, donde (A, B) corresponde a una cortadura de $\mathbb{Q}$.

El hecho de que cada número racional produzca una cortadura en $\mathbb{Q}$, permite considerar a $\mathbb{R}$ como una extensión del sistema numérico $\mathbb{Q}$, pues cada número racional r, se puede identificar como la cortadura $(\{x\in \mathbb{Q}: x \in r\}, \{x \in \mathbb{Q}: x > r\})$. Así,

$$0 = (\{x \in \mathbb{Q}: x \leq 0\}, \{x \in \mathbb{Q}: x > 0\}).$$

La identificación anterior nos permite identificar a $\mathbb{Q}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Sobre $\mathbb{R}$ se define una relación de orden que siga las directrices del orden en $\mathbb{Q}$, de la siguiente manera: Sean (A_1, B_1) y (A_2, B_2) cortaduras de $\mathbb{Q}$:

1. Si las cortaduras son producidas por números racionales p y q, entonces $(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ si y sólo si $p < q$.
2. Si al menos una de las dos cortaduras no es producida por un número racional, entonces $(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ si y solo si $A_1 \subset A_2$.

De esta forma, dada la cortadura $\alpha = (A, B)$ tenemos que: (i) $\alpha = 0$ (cortadura cero) si todo x del conjunto de racionales, pertenecientes al conjunto B, es mayor que el número racional cero. (ii) $\alpha \prec 0$ (cortadura menor que cero) si todo x del conjunto de racionales, pertenecientes al conjunto A, es menor que el número racional cero. (iii) $-\alpha = (C, D)$, se define como:

$$-\alpha = (C, D), \text{ donde } C =\{-x : x \in B\}, D =\{-x : x \in A\}.$$

Como en el caso de las extensiones anteriores, en lugar del símbolo "$\prec$" se utiliza "$<$" y las operaciones de suma y producto se definen con base en las operaciones de $\mathbb{Q}$.

Definición: Sean $\alpha = (A_1, B_1)$ y $\beta = (A_2, B_2)$ cortaduras de $\mathbb{Q}$, se define la suma de estas dos cortaduras $\alpha + \beta$, como la cortadura (C, D) tal que:

$$D = \{x + y : x \in B_1 , y \in B_2\}$$

$$C = \mathbb{Q} - D$$

Por ejemplo, si tomamos α y β así:
$\alpha = (\{x \in \mathbb{Q}: x \leq 4\}, \ \{x \in \mathbb{Q}: x > 4\})$
$\beta = \{x \in \mathbb{Q}: x \leq -3\}\{x \in \mathbb{Q}: x > -3\}$, entonces

$\alpha + \beta = (\{x + y : x \ \leq 4, y \leq -3\}, \ \{x + y : x > 4, y < -3\})$, esto es:

$\alpha + \beta = (\{x \in \mathbb{Q}: x \leq 1\}, \ \{x \in \mathbb{Q}: x > 1\}) = 4 + (-3) = 1.$

Definición: Sean $\alpha = (A_1, B_1)$ y $\beta = (A_2, B_2)$ cortaduras de $\mathbb{Q}$; definimos el producto $\alpha \bullet \beta$, de la siguiente manera:

1. Si $\alpha, \beta > 0$, entonces $\alpha \bullet \beta = (C, D)$ tal que: $D = \{x \bullet y : x \in B_1, y \in B_2\}$ y $C = \mathbb{Q} - D$
2. Si $\alpha, \beta < 0$, entonces $\alpha \bullet \beta = (-\alpha) \bullet (-\beta)$
3. Si $\alpha > 0$ y $\beta < 0$, entonces $\alpha \bullet \beta = (\alpha) \bullet (-\beta)$
4. Si $\alpha < 0$ y $\beta > 0$, entonces $\alpha \bullet \beta = (-\alpha) \bullet (\beta)$

Si $\alpha = (\{x \in \mathbb{Q}: x \leq 4\}, x \in \mathbb{Q}: x > 4\})$ y $\beta = (\{x \in \mathbb{Q}: x \leq -3\}, \{x \in \mathbb{Q}: x > -3\})$, como $\alpha > 0$ y $\beta < 0$, entonces $\alpha \bullet \beta = (\alpha) \bullet (-\beta)$, donde $-\beta = (\{x \in \mathbb{Q}: x \leq 3\}, \{x \in \mathbb{Q}: x > 3\})$, por lo tanto:

$\alpha \bullet \beta = (E, D)$, donde,

$D = \{ -x \bullet y : x > 4, y > 3 \} = \{ x \in \mathbb{Q}: x > -12\}$

$E = \{ x \in \mathbb{Q}: x \leq -12\}$

No es difícil verificar que las operaciones que se han definido sobre $\mathbb{R}$ (el conjunto de todas las cortaduras de $\mathbb{Q}$) cumplen con los axiomas de cuerpo que se enunciaron al inicio de este capítulo. Eso significa que, algebraicamente, $\mathbb{R}$ es un *cuerpo*. Además como $\mathbb{R}$ es una extensión de $\mathbb{Q}$, tenemos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, es decir, el conjunto de los números reales posee un subconjunto denso numerable.

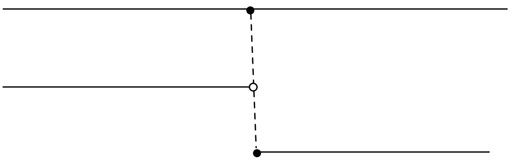
$\mathbb{R}$ COMO PROTOTIPO DE CONTINUO NUMÉRICO

Como lo expresamos en el primer capítulo, uno de los problemas históricos más relevantes apunta a establecer una definición del continuo matemático sin involucrar los argumentos metafísicos aristotélicos o explicaciones intuitivas que caracterizan lo continuo como aquello que "carece de huecos". En este sentido, Dedekind advierte que, en contraposición con la tradición aristotélica, la recta geométrica ***L***, prototipo del continuo, no es más que un agregado de infinitos puntos distribuidos de manera especial, cuya propiedad fundamental se establece a través de la operación de "cortadura". En primer lugar, Dedekind define una relación de orden de acuerdo con la posición: si dos puntos p y q pertenecen a ***L***, se tiene que $p > q$, si y sólo si p se encuentra ubicado a la derecha de q. Esta relación de orden cumple con las siguientes leyes, similares a las anteriormente enunciadas para $\mathbb{Q}$:

1. Si p está a la derecha de q, y q a la derecha de r, entonces p estará también a la derecha de r.

2. Si p y q son dos números diferentes, hay siempre infinitos puntos entre ellos.
3. Si $p \in \boldsymbol{L}$, todos los puntos de $\boldsymbol{L}$ se dividen en dos clases, P_1 y P_2 tal que todo punto de P_1 se encuentra a la izquierda de cada punto de P_2; el punto p puede asignarse a P_1 o a P_2.

   Además, en $\boldsymbol{L}$ se cumple la siguiente propiedad que no cumple $\mathbb{Q}$:
4. Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe uno y sólo un punto que produce este corte de la recta en dos partes (Dedekind, 1998).



La definición de $\mathbb{R}$ como el conjunto de todas las cortaduras permite responder al problema de la caracterización del continuo desde la matemática misma. A diferencia de $\mathbb{Q}$, el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, sí cumple con la propiedad 4. Decimos, entonces que $\mathbb{R}$ corresponde a la versión aritmética del continuo lineal. Esto es, si definimos cortaduras en $\mathbb{R}$ con el orden establecido antes $(\mathbb{R}, <)$, se puede demostrar que toda cortadura es producida por un único elemento de $\mathbb{R}$.

La razón de esto es que hemos incorporado a nuestro sistema numérico las cortaduras de números racionales que no son producidas por racionales. En términos estructurales, estamos asumiendo que conjuntos como $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2 \text{ ó } a \leq 0\}$ que no tienen un *supremo* en $\mathbb{Q}$, lo tengan ahora en $\mathbb{R}$. Darle a esta cortadura la categoría de número implica aceptar la existencia del supremo de este conjunto. De esta forma incorporamos los números irracionales como aquellos números que provienen del *supremo* de conjuntos como el antes anotado. En particular, este conjunto nos permite darle un carácter numérico a $\sqrt{2}$. En este sentido, decimos que el conjunto de todas la cortaduras de $\mathbb{Q}$ (el sistema numérico $\mathbb{R}$) es completo y por lo tanto cumple el axioma de completez que enunciamos al principio de este capítulo. Hemos entonces caracterizado a $\mathbb{R}$ como *un conjunto totalmente ordenado y completo*. Sin embargo, $\mathbb{R}$ mismo no tiene un elemento mínimo ni un elemento máximo, ello significa que $\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado, completo y sin puntos extremos. La cuestión es que $\mathbb{R}$ es el único conjunto numérico con estas propiedades, salvo isomorfismos.

Definición: *Un conjunto A, dotado de un orden* $<_A$, y en el *cual se han definido las operaciones de suma*: $\oplus$ *y producto* $\otimes$, *es un conjunto isomorfo a* $(\mathbb{R}, <, +, \bullet)$ *si*:

1. *Existe una función biyectiva f*: $\mathbb{R} \rightarrow A$ (*A tiene igual número de elementos que* $\mathbb{R}$).
2. *Para x, y* $\in \mathbb{R}$, *si x < y, entonces* $f(x) <_A f(y)$.
3. *Para x, y* $\in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$.
4. *Para x, y* $\in \mathbb{R}$, $f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$.

En otras palabras, *A* es isomorfo a $\mathbb{R}$ si tiene el mismo número de elementos, trasmite el orden y transfiere las operaciones.

Como habíamos dicho antes, Cantor intentó dar una caracterización de $\mathbb{R}$ a través de algunas propiedades estructurales, llegando a la conclusión de que era denso, conexo y perfecto. Sin embargo, cualquier intervalo cerrado cumple estas tres propiedades, pero no es isomorfo a $\mathbb{R}$, pues tiene puntos finales.

¿Hemos caracterizado la esencia del continuo completamente?

Como establecimos antes, la anterior caracterización de $\mathbb{R}$, como el único (salvo isomorfismos) campo totalmente ordenado (con el orden usual), completo, sin puntos finales y que contiene un subconjunto denso numerable no agota todas las propiedades de $\mathbb{R}$. Además, queda aún el problema de la cardinalidad de $\mathbb{R}$: Atendiendo al hecho que,

$$car(\mathbb{R}) > car(\mathbb{N}),\ car(\wp(\mathbb{N})) > car(\mathbb{N}) \text{ y } car(\mathbb{R}) = car(\wp(\mathbb{N})), \text{ entonces,}$$

$$c = car(\wp(\mathbb{N})) = car(\mathbb{R}) \geq \aleph_1.$$

En este sentido, $car(\mathbb{R}) = c$, podría ser $\aleph_1$, $\aleph_2$, o cualquier otro cardinal mayor. Cantor supuso que $c = \aleph_1$ en lo que se conoce como *hipótesis del continuo*.

De esta forma la hipótesis del continuo establece que no hay un conjunto de cardinalidad intermedia entre $\aleph_0$ y *c*. En otras palabras, un subconjunto infinito *A* de $\mathbb{R}$ tienen dos posibilidades: $car(A) = \aleph_0$ ó $car(A) = \aleph_1$. ¿Se puede demostrar que efectivamente no hay un subconjunto de $\mathbb{R}$, de cardinalidad intermedia entre la cardinalidad de $\mathbb{N}$ y la cardinalidad de $\mathbb{R}$? Esta pregunta encabezaba la lista de 23 problemas que David Hilbert consideraba los dilemas más importantes que debían enfrentar los matemáticos del siglo XX, como lo expuso en el primer congreso mundial de matemáticas de 1900.

Muchos matemáticos buscaron respuesta a la hipótesis del continuo. Sin embargo, fueron Kurt Gödel, en 1938, y Paul Cohen, en 1963, quienes, de forma complementaria, demostraron que *ZFC* no era suficiente para demostrar ni la hipótesis del continuo ni su negación. Eso significa que se puede adoptar $c = \aleph_1$, o a cualquier otro cardinal mayor sin caer en contradicciones.

Gödel mostró que a partir de *ZFC* no es posible demostrar la existencia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tengan cardinal entre *car* ($\mathbb{N}$) y *car* ($\mathbb{R}$). Para ello estableció una nueva axiomática conjuntista, denominada *universo constructible de Gödel*, en la cual no tienen cabida los conjuntos de cardinalidad entre la cardinalidad de $\mathbb{N}$ y la de $\mathbb{R}$. El *universo constructible de Gödel* constituye una poderosa estructura que ha dado luces sobre muchos aspectos de la teoría de la medida de conjuntos.

Es importante aclarar que el resultado de Gödel no demostraba la hipótesis del continuo, sólo mostraba que a partir de *ZFC* no se puede inferir la negación de la hipótesis del continuo. En 1963 el norteamericano Paul Cohen complementó los trabajos de Gödel al demostrar que bajo ciertas condiciones, se podía constituir una teoría de conjuntos que daba cabida a conjuntos con cardinalidad intermedia entre la cardinalidad de $\mathbb{N}$ y la de $\mathbb{R}$ sin afectar la consistencia; es decir, sin el temor de la aparición de nuevas contradicciones.

Los resultados de Gödel y Cohen demuestran la independencia de la hipótesis del continuo del sistema *ZFC*, que, a su vez, parece indicar que la escogencia de la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es una cuestión netamente convencional. Sin embargo, esto es algo que no comparten muchos matemáticos, para quienes las demostraciones de Gödel y Cohen no resuelven el problema del continuo, sino que dejan planteado el dilema de determinar un universo matemático en el cual la hipótesis del continuo sea verdadera o falsa. Ese es el camino emprendido, a finales del siglo XX, por W. H. Woodin, de la Universidad de California.

Los anteriores aspectos nos ponen de frente nuevamente con el problema que planteamos al inicio en el sentido de entender las respuestas, dadas desde las matemáticas, a las actividades de medir, contar y ordenar. Para algunos, lo interesante es buscar una teoría de conjuntos en la cual todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ sean medibles en el sentido de Lebesgue. Sin embargo, este es un campo de investigación tan vasto que no se auguran respuestas a corto plazo.

Para finalizar este capítulo es conveniente que volvamos a nuestra indagación central concerniente a la construcción del continuo como objeto matemático. Recordemos que la *teoría primaria de la medida* entra en crisis por la aparición de las magnitudes inconmensurables. Durante más de 25 siglos la matemática giró, en gran parte, alrededor de la fundamentación de los números irracionales. Como hemos enunciado antes, la construcción conjuntista de $\mathbb{R}$ plantea grandes problemas que las construcciones de Cantor y Dedekind no solucionan. Uno de esos grandes problemas atañe a la existencia de conjuntos que no son L-medibles. Problema que se encuentra ligado al tipo de teoría de conjuntos que elijamos, lo cual determina la cardinalidad de $\mathbb{R}$ que asumamos. Parece que seguimos girando en torno a la misma problemática. El hecho es que el continuo sigue ocultando aún muchos secretos.

Bibliografía

Apostol, T. (1986). *Análisis matemático.* Barcelona: Reverté.

Baire, R. (1905). *Lecons sur les fonctions discontinues.* Paris: Gauthier-Villars.

Baire, R., Borel, E., et al. (1905). *Cinq lettres sur la théorie des ensembles.* Bulletin de la Société Mathématique de France, (33), pp. 261-273.

Bolzano, B. (1981). *Las paradojas del infinito.* México: Colección Mathema UNAM. Primera edición en alemán, 1851.

Borel, E. (1928). *Leçons sur la théorie des fonctions.* Paris: Gauthier-Villars.

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

Cantor, G. (1955). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers.* New York: Dover Publications. Primera edición en alemán, 1955.

Cauchy, A. L. (1994). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. México: Colección Mathema UNAM. Primera edición en francés, 1821.

Cavaillès, J. (1992). *Méthode axiomatique et formalisme.* México: Colección Mathema UNAM. Primera versión en francés, 1938.

Dauben, J. (1979). *Georg Cantor, His mathematics and Philosophy on the infinite.* Cambridge: Harvard University Press.

Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza. Primera versión en alemán, 1888.

Gispert, H. (1991). *La France mathématique. La société mathématique de France* (1871-1914). Paris: Cahiers d´histoire et de philosophie des sciences.

Grattan-Guinness (1982). *Del cálculo a la teoría de conjuntos.* 1630-1910. Madrid: Alianza.

Hawkins, T. (1979). *Lebesgue'theory of integration.* New York: Chelsea Publishing Company.

Jech, T. (2003). *Set theory. The third millennium.* New York: Springer-Verlag.

Hrbacek, K. y Jech, T. (1999). *Introduction to set theory.* New York: Marcel Dekker, Inc.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza.

Lebesgue, H. (1904). *Lecons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Paris: Gauthier-Villars.

Lebesgue, H. (1905). *Sur les functions représentables analytiquement.* J. de Math. Pures et Appl., 6, 1, pp. 139-216.

Lusin, N. (1972). *Les ensembles analytiques et leurs applications.* New York: Chelsea Publishing Company. Primera edición, 1930.

Moore, G. (1982). *Zermelo's Axiom of Choice.* New York: Springer-Verlag.

Recalde, L. (2010). *La teoría de funciones de Baire: La constitución de lo discontinuo como objeto matemático.* Cali: Universidad del Valle.

Zermelo, E. (1904). *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.* Math. Ann., 59, pp. 514-516. En: van Heijenoort, J. (1967). *From Frege to Gödel*. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge: Harvard University Press, pp. 139-141.

Zermelo, E. (1908). *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.* En: van Heijenoort, J. (1967). *From Frege to Gödel*. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge: Harvard University Press, pp. 183-198.

ÍNDICE

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

AUTORES

Luis Carlos Arboleda Aparicio

- Profesor Jubilado Especial, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad Santiago de Cali.
- Especialista en Lógica y Epistemología, Instituto de Historia de las Ciencias, Academia Polaca de Ciencias, Varsovia.
- Doctor en Historia de las Matemáticas y su Enseñanza, Centro Alexander Koyré-Escuela de Altos Estudios en Ciencias Sociales, París.
- Posdoctor en Historia de las Ciencias, Centro de Estudios Históricos, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid.
- Miembro de los Grupos de Historia de las Matemáticas, Educación Matemática y Previsión y Pensamiento Estratégico, Universidad del Valle.
- Ha dirigido tesis de maestría en el Departamento de Matemáticas y de doctorado en el Instituto de Educación y Pedagogía.
- Tiene varias publicaciones en el campo de la Historia de las Matemáticas.
- e-mail: luis.carlos.arboleda@gmail.com

Luis Cornelio Recalde

- Profesor Titular, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle.
- Matemático y Magister en Matemáticas, Universidad del Valle.
- Doctor en Educación Matemática, énfasis en Historia de las Matemáticas, Universidad del Valle.
- Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas, Universidad del Valle.
- Ha dirigido varias tesis de pregrado y de maestría en el Departamento de Matemáticas y en el Instituto de Educación y Pedagogía; y de doctorado en el Instituto de Educación y Pedagogía.
- Tiene varias publicaciones en el campo de la Historia de las Matemáticas.
- e-mail: lurecal@yahoo.com

Gabriela Inés Arbeláez

- Profesora, Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca.
- Matemática y Magister en Matemáticas, Universidad del Valle.
- Doctora en Educación Matemática, énfasis en Historia de las Matemáticas, Universidad del Valle.
- Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas, Universidad del Valle.
- Ha dirigido varias tesis de pregrado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca.
- Tiene varias publicaciones en el campo de la Historia de las Matemáticas.
- e-mail: gaby@unicauca.edu.co

Guillermo Ortiz Rico

- Profesor, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle.
- Matemático y Magister en Matemáticas, Universidad del Valle.
- Doctor en Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas, Universidad del Valle.
- Ha dirigido varias tesis de pregrado y de posgrado en el Departamento de Matemáticas y en el Instituto de Educación y Pedagogía.
- Tiene varias publicaciones en el campo de la Lógica, específicamente en lo relacionado con Lógicas anotadas.
- e-mail: gortizri@univalle.ed.co

Maribel Patricia Anacona

- Profesora, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Matemática y Magister en Matemáticas, Universidad del Valle.
- Candidata a Doctor en Educación Matemática, Universidad del Valle.
- Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas,Universidad del Valle.
- Ha dirigido varias tesis de pregrado en el Instituto de Educación y Pedagogía.
- Tiene algunas publicaciones en Historia de las Matemáticas.
- e-mail: maribel@univalle.edu.co

Édgar Fernando Gálvez Peña

- Profesor, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Licenciado en Filosofía y Magister en Educación, énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle.
- Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas, Universidad del Valle.
- Ha dirigido de varias tesis de pregrado.
- e-mail: ferchogalvez@yahoo.com

Ligia Amparo Torres Rengifo

- Profesora, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Licenciada en Matemáticas, Universidad Santiago de Cali
- Especialista en Educación Matemática y Magister en Educación, énfasis en educación matemática, Universidad del Valle.
- Estudios de doctorado en Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia - España.
- Miembro del Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle.
- Ha dirigido varias tesis de pregrado en el Instituto de Educación y Pedagogía.
- Tiene algunas publicaciones en Evaluación en Educación Matemática y Didáctica del Álgebra.
- e-mail: liamtore@univalle.edu.co

María Rocío Malagón Patiño

- Licenciada en Matemáticas y Física, Universidad Santiago de Cali.
- Magister en Educación Matemática, Universidad del Valle.
- Trabaja actualmente en la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas, particularmente en lo relativo a los procesos de formación de pensamiento algebraico, lo cual constituye su campo de interés. Tiene varias publicaciones en este campo.
- e-mail: rociomp63@yahoo.com

Luz Edith Valoyes Chávez

- Licenciada en Matemáticas y Física, Universidad del Valle.
- Magister en Educación Matemática, Universidad del Valle.
- Desde hace algunos años se ha dedicado a participar en los diferentes procesos de formación de maestros de matemáticas a nivel inicial y en ejercicio.
- Su campo de indagación es la didáctica, historia y epistemología del álgebra, alrededor de lo cual ha escrito varios artículos.
- e-mail: evaloyes@gmail.com

Universidad
del Valle

Programa Editorial

Ciudad Universitaria, Meléndez
Cali, Colombia
Teléfonos: (+57) 2 321 2227
321 2100 ext. 7687
http://programaeditorial.univalle.edu.co
programa.editorial@correounivalle.edu.co

¡Siguenos!

programaeditorialunivalle